Математична фізика

> Я хочу похвалить то, чего не имею, а именно знание точных наук, например, математики. Эта, по словам Августина, Паскаля и многих других, самая абстрактная из человеческих наук оперирует в области не фантазии, а мысленных реальностей и чрезвычайно дисциплинирует ум. Именно из среды математиков нередко выходят хорошие организаторы, практики, волевые люди, умеющие не просто думать, но и додумывать до конца.
>
> А. Ткачев

Прикладна математика є областю сучасної математики, основною метою якої є дослідження рівнянь, що мають "прикладне" значення. У математиці зустрічаються найрізноманітніші рівняння (алгебраїчні, диференціальні, із частинними похідними,...). Розділення математики на чисту (академічну) та прикладну є достатньо умовним. Як правило, в прикладній математиці розробляються методи дослідження і розв'язання рівнянь актуальних для механіки, фізики, хімії, економіки, біології, соціології ,..., а в чистій математиці розглядаються "абстрактні" рівняння. Втім, відомі численні приклади рівнянь, що виникали і досліджувались у чистій математиці та надалі ставали актуальними і, навіть, фундаментальними для механіки, фізики, хімії,....

Математична фізика є областю прикладної математики, основною метою якої є дослідження крайових і початково-крайових задач для рівнянь з частинними похідними, що мають "прикладне" значення. Ці задачі виникають в різних розділах механіки, фізики, хімії, економіки, біології, соціології,..., хоча перелік таких задач математичної фізики є достатньо коротким.

1. Банахові простори.

Кожна сучасна наука має свої сталі правила, традиції і закони розвитку. Так, в математиці прийнято виводити різноманітні твердження із використанням логічно коректних (несуперечливих) міркувань. Такі твердження зазвичай ґрунтуються на загальноприйнятих фундаментальних поняттях. Для багатьох сучасних областей математики, зокрема, прикладної математики, такими фундаментальними поняттями є поняття *множини* та *відображення*.

B1.1. *Множина* – сукупність елементів будь-якої природи.

B1.2. *Відображення* φ із множини A у множину B – правило зіставлення кожному елементу із A деякого елементу із B. Позначення: $\varphi : A \to B$.

B1.3. Нехай задані множини A, B і відображення $\varphi : A \to B$. *Рівнянням* називається співвідношення

$$\varphi(a) = b, \tag{1.1}$$

де $a \in A$ і $b \in B$. *Розв'язати рівняння* (1.1) означає, що для заданого $b \in B$ необхідно знайти $a \in A$ таке, що $\varphi(a) = b$.

Основна проблема математики – **розв'язувати** різноманітні рівняння.

Образом відображення $\varphi : A \to B$ є множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(a) : a \in A\} \subseteq B.$$

Образом елементу $a \in A$ є елемент $b = \varphi(a) \in B$.

Рівняння (1.1) може бути беззмістовним для $b \in B \setminus \operatorname{Im}\varphi$, якщо $B \neq \operatorname{Im}\varphi$. Проте, за визначенням рівняння (1.1) завжди має сенс і розв'язок для $b \in \operatorname{Im}\varphi$. Таким чином, іноді корисно "**зменшити**" B, щоб рівняння (1.1) мало розв'язок.

B1.4. Відображення $\varphi : A \to B$ називається *накладенням*, якщо

$$\operatorname{Im}\varphi = B.$$

Для таких φ рівняння (1.1) завжди має сенс і розв'язок. Проте, описання $\operatorname{Im}\varphi$ не завжди відомо і фактично еквівалентно розв'язанню рівняння (1.1). Наприклад, для $b, c \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^2 + bx : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ відомо, що

$$c \in \operatorname{Im}\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad b^2 + 4c \geq 0.$$

Але описання $\operatorname{Im}\varphi$ не відомо, наприклад, для $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, $a, \ldots, e \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + \ldots + ex : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

З іншого боку, для $b, c \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^2 + bx : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ завжди маємо, що $c \in \operatorname{Im}\varphi$, тобто іноді корисно "**збільшити**" A і B щоб рівняння (1.1) "мало" розв'язок. Точніше, іноді зручно досліджувати замість (1.1) рівняння

$$\overline{\varphi}(\overline{a}) = \overline{b} \qquad \text{яке називається } \textit{розширенням} \text{ (1.1)}, \tag{$\overline{1.1}$}$$

де $\overline{\varphi} : \overline{A} \to \overline{B}$ такі, що $A \subset \overline{A}$, $B \subseteq \overline{B}$ і $\overline{\varphi}(A) = \varphi(A)$, тобто $\overline{\varphi}(a) = \varphi(a)$ для $a \in A$. Саме так (при розширенні рівнянь другого порядку) виникла множина комплексних чисел $\mathbf{C}$ (як втім і багато інших множин, які використовуються в сучасній математиці, виникли при розширенні різноманітних рівнянь).

З появою комплексних чисел вдалося повністю описати $\operatorname{Im}\varphi$ для $n \in \mathbf{N}$, $a, \ldots, e \in \mathbf{C}$ і відображення $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + \ldots + ex : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. У даному випадку $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{C}$ відповідно до *основної теореми алгебри*, однак рівняння (1.1) може мати декілька розв'язків. Зазвичай корисно знати скільки існує розв'язків, але найкращим варіантом може бути єдиність розв'язку рівняння (1.1).

В1.5. Відображення $\varphi : A \to B$ називається *вкладенням*, якщо

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Для таких φ рівняння (1.1) має єдиний розв'язок, якщо цей розв'язок існує. Таким чином, іноді корисно "**зменшити**" A щоб розв'язок був єдиним. Наприклад, якщо відомо, що для кожного $b \in B$ розв'язків завжди два, тоді може бути корисним "поділити" A на дві частини і отримати ідеальний випадок.

В1.6. Відображення $\varphi : A \to B$ називається *взаємно однозначним*, якщо воно є вкладенням та накладенням.

Для таких φ рівняння (1.1) завжди має єдиний розв'язок $a \in A$ для кожного $b \in B$, що вирішує основну проблему, і множини A та B побудовані в деякому розумінні однаково, оскільки визначено відображення $\tilde{\varphi} : B \to A$, що зіставляє кожному $b \in B$ єдиний розв'язок $a \in A$ і таке, що $\varphi(\tilde{\varphi}(b)) = b$ та $\tilde{\varphi}(\varphi(a)) = a$.

В1.7. Дві множини A та B називаються *еквівалентними*, якщо існує взаємно однозначне відображення $\varphi : A \to B$. Позначення: $A \cong B$.

Основний принцип математики – **ототожнювати** еквівалентні множини.

Цей принцип є природним: якщо множини $A, B, C, \ldots$ побудовані однаково, тоді досить вивчити, наприклад, A і одночасно зрозуміти будову еквівалентних множин. Цей принцип використовується постійно. Наприклад, еквівалентність

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \cong \{1, \ldots, n\} \cong \{0, \ldots, n-1\}$$

означає одвічне бажання все перенумеровувати (маршрути, жителів, студентів, юридичних осіб, телефони, ...), що іноді достатньо зручно. Саме так виникла множина натуральних чисел $\mathbf{N}$, із скінченними підмножинами якої можна ототожнити будь-яку скінчену множину, що підкреслює корисність математики принаймні в тих областях діяльності, де використовуються скінченні множини.

B1.8. *Операцією* на множині A називається всяке відображення із $A \times A$ в A.

Образ пари (a, b) називають сумою, або добутком, або згорткою ... і пишуть, відповідно, $a + b$ або $a \cdot b$ або $a * b$ ... .

Операція $a \cdot b$ *комутативна*, якщо $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall\, a, b \in A$.

Операція $a \cdot b$ *асоціативна*, якщо $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall\, a, b, c \in A$.

B1.9. *Операцією множення на число* $\alpha \in \mathbf{C}$ (або $\alpha \in \mathbf{R}$) на множині A називається всяке відображення із $\mathbf{C} \times A = \{(\alpha, a) : \alpha \in \mathbf{C},\, a \in A\}$ в A.

Образ пари (α, a) позначають через $\alpha\, a$ або $\alpha \cdot a$.

B1.10. Множина L називається *лінійним* простором над $\mathbf{C}$ (або $\mathbf{R}$), якщо:

(I) на L визначена операція додавання $L \times L \ni (a, b) \mapsto a + b \in L$ така, що:

1) $a + b = b + a \quad \forall\, a, b \in L$;

2) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall\, a, b, c \in L$;

3) $\exists\, 1\, \theta \in L \,:\, a + \theta = a \quad \forall\, a \in L$;

4) $\forall\, a \in L \quad \exists\, 1\, (-a) \in L \,:\, a + (-a) = \theta$;

(II) на L визначена операція множення на числа $\alpha \in \mathbf{C}$ (або $\alpha \in \mathbf{R}$) така, що:

5) $\alpha\, (\beta\, a) = (\alpha\, \beta)\, a \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \forall\, a \in L$;

6) $\alpha\, (a + b) = \alpha\, a + \alpha\, b \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{C} \quad \forall\, a, b \in L$;

7) $(\alpha + \beta)\, a = \alpha\, a + \beta\, a \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \forall\, a \in L$;

8) $1\, a = a \quad \forall\, a \in L$.

B1.11. *Нормою* на лінійному просторі L називається всяке відображення $\eta : L \to \overline{\mathbf{R}}_+ = \{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}$ таке, що для $\forall\, \alpha \in \mathbf{C}$ та $\forall\, a, b \in L$ маємо:

$$1)\quad \eta(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \theta\,;$$

$$2)\quad \eta(\alpha\, a) = |\alpha|\, \eta(a)\,;$$

$$3)\quad \eta(a + b) \leq \eta(a) + \eta(b).$$

Лінійний простір L із деякою нормою $\eta(\cdot)$ називається *нормованим простором* (L, η). Зазвичай позначають $\eta(a) = \|a\|_L$ або $\eta(a) = \|a\|$.

Послідовністю $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в L називається образ кожного відображення із $\mathbf{N}$ в L.

B1.12. Елемент $a \in L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ є *границею* послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$, якщо $\|a_n - a\|_L \to 0$ при $n \to \infty$. Позначення: $a_n \to a$.

B1.13. Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *фундаментальною*, якщо $\|a_n - a_m\|_L \to 0$ при $n, m \to \infty$.

B1.14. Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *повним* або *банаховим*, якщо кожна фундаментальна послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ має границю $a \in L$.

Нормований простір дійсних чисел $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ із нормою $\|a\|_{\mathrm{R}} = |a|$ як відомо є повним, але нормований простір раціональних чисел $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$ не є повним, оскільки

$$\mathbf{Q} \ni a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \in \mathbf{R} \neq \mathbf{Q}.$$

B1.15. Відображення $\varphi : M \to L$ нормованих просторів $(M, \|\cdot\|_M)$ і $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *неперервним у точці* $a \in M$, якщо

$$\varphi(a_n) \to \varphi(a) \qquad \text{для кожної послідовності} \qquad a_n \to a\,.$$

Відображення $\varphi : M \to L$ нормованих просторів $(M, \|\cdot\|_M)$ і $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне у кожній точці $a \in M$.

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що для нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ відображення $\varphi = \|\cdot\|_L : L \to \mathbf{R}$ є неперервним, тобто

$$\|a_n\|_L \to \|a\|_L \quad \text{для кожної послідовності} \quad a_n \to a \quad \text{і кожного} \quad a \in L.)$$

Позначимо

$$C[0,1] = C^0[0,1] = \{f : f \ \text{ неперервна функція із } [0,1] \text{ в } \mathbf{C}\},$$

$$\|f\|_0 = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Нормований простір $(C^0[0,1], \|\cdot\|_0)$ є повним, оскільки як відомо границя послідовності рівномірно неперервних функцій є рівномірно неперервною функцією.

В1.16. Відображення $\varphi : L \to L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *стискаючим*, якщо

$$\exists\, \alpha \in (0,1) \;:\quad \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_L \le \alpha\, \|a - b\|_L \qquad \forall\, a, b \in L.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що для нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ стискаючі відображення $\varphi : L \to L$ є неперервними.)

Теорема 1.17 (Банаха про стискаючі відображення). *Нехай відображення $\varphi : L \to L$ банахового простору $(L, \|\cdot\|_L)$ є стискаючим. Тоді*

$$\exists\, 1\, a_0 \in L \;:\quad \varphi(a_0) = a_0.$$

$\triangleleft$ Фіксуємо довільне $a \in L$ і розглянемо послідовність

$$a_1 = \varphi(a), \quad a_2 = \varphi(a_1) = \varphi(\varphi(a)) = \varphi^2(a),$$

$$a_3 = \varphi(a_2) = \varphi(\varphi(a_1)) = \varphi^3(a), \ldots,$$

$$a_n = \varphi(a_{n-1}) = \varphi^n(a), \ldots.$$

Тоді

$$\|a_1 - a_2\|_L = \|\varphi(a) - \varphi(a_1)\|_L \le \alpha\, \|a - a_1\|_L = \alpha\, \|a - \varphi(a)\|_L,$$

$$\|a_2 - a_3\|_L = \|\varphi(a_1) - \varphi(a_2)\|_L \le \alpha^2\, \|a - \varphi(a)\|_L, \ldots$$

$$\|a_n - a_{n+1}\|_L \le \alpha^n\, \|a - \varphi(a)\|_L, \ldots.$$

Для цілого $p > 1$ маємо

$$\|a_n - a_{n+p}\|_L \le \|a_n - a_{n+1}\|_L + \|a_{n+1} - a_{n+2}\|_L + \ldots + \|a_{n+p-1} - a_{n+p}\|_L \;\le$$

$$\le\; (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1})\, \|a - \varphi(a)\|_L = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha}\, \|a - \varphi(a)\|_L.$$

Таким чином,

$$\|a_n - a_{n+p}\|_L < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\, \|a - \varphi(a)\|_L \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty \tag{1.2}$$

і послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ є фундаментальною, оскільки $0 < \alpha < 1$.

Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ є повним, отже,

$$\exists\, a_0 \in L \;:\; a_n \to a_0.$$

Крім того,

$$\|\varphi(a_0) - a_n\|_L = \|\varphi(a_0) - \varphi(a_{n-1})\|_L \le \alpha\, \|a_0 - a_{n-1}\|_L \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty,$$

тобто $a_n \to \varphi(a_0)$ та

$$\exists\, a_0 \in L: \quad a_0 = \varphi(a_0)$$

завдяки єдиності границі. Припустимо, що $\exists\, a_0, b_0 \in L\colon a_0 = \varphi(a_0)$ і $b_0 = \varphi(b_0)$. Тоді

$$\|a_0 - b_0\|_L = \|\varphi(a_0) - \varphi(b_0)\|_L \le \alpha\, \|a_0 - b_0\|_L \quad \Leftrightarrow \quad \|a_0 - b_0\|_L(1-\alpha) \le 0.$$

Таким чином, $\|a_0 - b_0\|_L = 0$ і $a_0 = b_0$. ▷

Ця теорема вирішує основну проблему для конкретного класу рівнянь і підкреслює важливість **повноти** і **переходу до границі** при розв'язувані рівнянь. Крім того, ця теорема дає алгоритм знаходження наближеного розв'язку рівняння $a_0 = \varphi(a_0)$ із наперед заданою точністю $\varepsilon > 0$. Дійсно, із неперервності відображення $\|\cdot\|_L$ і нерівності (1.2) випливає, що

$$\|a_n - a_0\|_L < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \|a - \varphi(a)\|_L.$$

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке n, що $\|a_n - a_0\|_L < \varepsilon$, тобто знайти розв'язок рівняння $a_0 = \varphi(a_0)$ із наперед заданою точністю ε.

Приклад 1.18. Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння

$$y'_t = F(t,y)\,, \qquad y|_{t=t_0} = y_0, \tag{1.3}$$

де $t \in (t_0, T)$, $t_0 < T$ та $y_0 \in \mathbf{C}^n$.

Теорема 1.19 ($\exists 1$ для задачі Коші). *Припустимо, що* $F \in C^0([t_0,T] \times \mathbf{C}^n)^n$ *і*

$$|F(t,y_1) - F(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \textit{для} \quad t \in (t_0,T) \quad \textit{і} \quad y_1, y_2 \in \mathbf{C}^n$$

(умова Ліпшиця із константою L). Тоді

$$\exists 1 \;\; y \in C^1[t_0,T]^n: \quad y'_t = F(t,y)\,, \qquad y|_{t=t_0} = y_0,$$

де $C^1[t_0,T]^n = \{f \in C^0[t_0,T]^n : f'_t \in C^0[t_0,T]^n\}$.

◁ Задача (1.3) еквівалентна такій задачі для інтегрального рівняння

$$\text{знайти} \quad y \in C^0[t_0,T]^n : \quad y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t, y(t))\, dt\,. \tag{1.4}$$

Дійсно, якщо $y \in C^1[t_0,T]^n$ є розв'язком задачі (1.3), то після інтегрування отримуємо (1.4). Відповідно, якщо $y \in C^0[t_0,T]^n$ є розв'язком задачі (1.4), то після диференціювання отримуємо (1.3), оскільки $F(t,y(t)) \in C^0[t_0,T]^n$ як суперпозиція неперервних функцій $y \in C^0[t_0,T]^n$ і $F \in C^0([t_0,T]\times \mathbf{C}^n)^n$.

Фіксуємо $t_1 \in (t_0,T]$ таке, що $L(t_1-t_0) < 1$ і розглянемо відображення $\varphi : C^0[t_0,t_1]^n \to C^0[t_0,t_1]^n$, визначене формулою

$$\varphi(y) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t, y(t))\, dt\,.$$

Перевіримо, що φ є стискаючим для повного простору $(C^0[t_0,t_1]^n, \|\cdot\|_0)$. Маємо

$$\|\varphi(a)-\varphi(b)\|_0 = \max_{t_0\le t\le t_1} |\varphi(a)(t)-\varphi(b)(t)| \le$$

$$\le \max_{t_0\le t\le t_1} \int\limits_{t_0}^{t} |F(t,a(t)) - F(t,b(t))|\, dt \le \max_{t_0\le t\le t_1} L \int\limits_{t_0}^{t} |\, a(t)-b(t)|\, dt \le$$

$$\le L(t_1-t_0) \max_{t_0\le t\le t_1} |\, a(t)-b(t)| = L(t_1-t_0)\, \|a-b\|_0$$

для $a,b \in C^0[t_0,t_1]^n$. Таким чином, φ є стискаючим для $(C^0[t_0,t_1]^n, \|\cdot\|_0)$ і тому $\exists\, 1$ розв'язок $y \in C^0[t_0,t_1]^n$ рівняння (1.4), зокрема, $y(t_1)$ є визначеним.

При $t_1 < T$ розіб'ємо відрізок $[t_0,T]$ на відрізки $[t_0,t_1],\ldots,[t_{k-1},t_k]$ так, щоб $L(t_j - t_{j-1}) < 1$ для $j = 1,\ldots,k$ і повторимо попереднє доведення для цих відрізків, використовуючи фактично лінійність інтеграла. Тоді доведемо, що

$$\exists\, 1\ y \in C^0[t_0,T]^n : \quad y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t, y(t))\, dt\,. \,\triangleright$$

У доведений теоремі суттєво, що розв'язок $y(t)$ є визначеним і скінченним для кожного $t \in [t_0,T]$. Ця властивість може не виконуватися, якщо умова Ліпшиця порушена, наприклад, для додатних $y_0, F \in \mathbf{R}$ і $n = 1$ задача Коші

$$y'_t = F y^2\,, \qquad y|_{t=0} = y_0, \tag{1.5}$$

має розв'язок $y(t) = \frac{y_0}{1 - t F y_0}$, який не є визначеним для $t = \frac{1}{F y_0}$.

Цей приклад пояснює суттєву відмінність між $C^0[0, Fy_0]$ і $C^0[0, Fy_0)$. Проте, іноді є корисною наступна теорема про локальну розв'язуваність задачі Коші.

Теорема 1.20 (локальне $\exists 1$ для задачі Коші). *Нехай* $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbf{C}^n)^n$ *і*

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L(y_1, y_2)\, |y_1 - y_2| \quad \text{для} \quad t \in (t_0, T) \quad \text{і} \quad y_1, y_2 \in \mathbf{C}^n,$$

де $L(y_1, y_2)$ *є рівномірно обмеженою на обмежених множинах (локальна умова Ліпшиця), тобто для кожного* $c > 0$

$$L' = \sup_{|y_1| < 2c, |y_2| < 2c} L(y_1, y_2) < \infty. \tag{1.6}$$

Тоді існує $T_0 > t_0$ *таке, що* $T \geq T_0$ *і*

$$\exists 1 \;\; y \in C^1[t_0, T_0]^n \; : \quad y'_t = F(t, y)\,, \qquad y|_{t=t_0} = y_0.$$

$\triangleleft$ Фіксуємо $c > |y_0|$, позначимо $M = \max\limits_{[t_0, T]} |F(t, y_0)|$ та оберемо $T_0 > t_0$ так, щоб

$$M(T_0 - t_0) \leq c \qquad \text{і} \qquad L'(T_0 - t_0) < 1. \tag{1.7}$$

Повторюючи доведення теореми Банаха, визначимо

$$a = y_0, \quad a_1 = \varphi(a), \quad \ldots, \quad a_n = \varphi^n(a)$$

для

$$\varphi(y) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t, y(t))\, dt\,.$$

Тоді

$$\|a - \varphi(a)\|_0 = \max_{[t_0, T_0]} \left| \int\limits_{t_0}^{t} F(t, y_0)\, dt \right| \leq M(T_0 - t_0) \leq c,$$

зокрема, $\|a_1\|_0 \leq \|a_1 - a\|_0 + \|a\|_0 < 2c$. Припустимо по індукції виконання нерівностей $\|a_2\|_0 < 2c, \ldots \|a_n\|_0 < 2c$ і перевіримо, що також $\|a_{n+1}\|_0 < 2c$. Маємо

$$\|a_{n+1} - a_n\|_0 \leq \max_{t_0 \leq t \leq T_0} \int\limits_{t_0}^{t} |F(t, a_n(t)) - F(t, a_{n-1}(t))|\, dt \leq$$

$$\leq \alpha\, \|a_n - a_{n-1}\|_0 \leq \alpha^2 \|a_{n-1} - a_{n-2}\|_0 \leq \alpha^n \|a - \varphi(a)\|_0 \leq \alpha^n c,$$

відповідно до (1.6),(1.7), де $\alpha = L'(T_0 - t_0) < 1$. Таким чином,

$$\|a_{n+1}\|_0 \leq \|a_{n+1} - a_n\|_0 + \|a_n - a_{n-1}\|_0 + \ldots + \|a_1 - a\|_0 + \|a\|_0 \leq$$

$$\leq (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \ldots + 1)\, c + \|a\|_0 < \frac{c}{1 - \alpha} + c < 2c$$

і переходячи до границі $a_n \to y$, отримаємо розв'язок задачі Коші такий, що

$$\max_{[t_0, T_0]} |y| \leq 2c. \qquad \triangleright$$

Якщо $T_0 < T$, тоді можливо повторити попередню конструкцію із початкового моменту часу $t_1 = T_0$, фіксуючи $c_1 > 2c \geq |y(t_1)|$ і обчислюючи $L' = L'(c_1)$, яке залежить від c_1, і отримати $T_1 > T_0$ таке, що

$$\max_{[t_0, T_1]} |y| \leq 2c_1.$$

Повторюючи цей процес, знайдемо $T_m > \ldots > T_1 > T_0$ і розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші такий, що $\max\limits_{[t_0, T_m]} |y| \leq 2c_m$ для деякої константи c_m. По суті можливі два варіанти або $|y(T_m)| \to \infty$ (як в прикладі (1.5)) або розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші буде продовжений на відрізок $[t_0, T]$ і знайдеться константа C така, що

$$\max_{[t_0, T]} |y| \leq C.$$

Більш того, якщо остання нерівність відома із деяких додаткових оцінок, тоді розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші завжди може бути продовжений на відрізок $[t_0, T]$, оскільки варіант $|y(T_m)| \to \infty$ є неможливим.

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що умови теореми 1.20 виконані для прикладу (1.5).)

2. Поповнення просторів.

B2.1. Множина $A \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *обмеженою*, якщо

$$\exists\, M \in \mathbf{R}_+ : \qquad \|\, a \,\|_L \leq M \qquad \forall\, a \in A.$$

B2.2. Відображення $\varphi : L \to H$ лінійних просторів L і H над $\mathbf{C}$ називається (лінійним) *оператором*, якщо

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(\alpha\, a) = \alpha\, \varphi(a), \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{C}, \quad \forall\, a, b \in L.$$

B2.3. Оператор $\varphi : L \to H$ нормованих просторів $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ називається *обмеженим*, якщо

$$\exists\, M \in \mathbf{R}_+ : \qquad \|\varphi(a)\|_H \leq M\|a\|_L \qquad \forall\, a \in L.$$

Найменша із констант $M \in \mathbf{R}_+$ $(: \ \|\varphi(a)\|_H \leq M\|a\|_L\,)$ називається нормою оператора φ і позначається $\|\varphi\,\|_B$.

Теорема 2.4. *Оператор* $\varphi : L \to H$ *нормованих просторів* $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ *є обмеженим* $\Leftrightarrow$ *оператор* $\varphi : L \to H$ *є неперервним.* $\triangleleft\, \triangleright$

Множина всіх обмежених операторів $\varphi : L \to H$ для нормованих просторів $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ позначається $B(L, H)$.

Теорема 2.5. *Множина* $B(L, H)$ *із природними операціями є лінійним простором. Простір* $(B(L, H), \|\cdot\|_B)$ *є нормованим простором і*

$$\|\varphi\,\|_B = \sup_{\|a\|_L \leq 1} \|\varphi(a)\|_H = \sup_{a \neq \theta} \frac{\|\varphi(a)\|_H}{\|a\|_L} \qquad \forall \varphi \in B(L, H).$$

Простір $(B(L, H), \|\cdot\|_B)$ *є банаховим, якщо* $(H, \|\cdot\|_H)$ *є банаховим.* $\triangleleft\, \triangleright$

Зокрема, нормований простір $(B(L, \mathbf{C}), \|\cdot\|_B)$ є банаховим, цей простір називається *спряженим* (або *дуальним*) до $(L, \|\cdot\|_L)$ і позначається $L^* \ (= (B(L, \mathbf{C}))$. Елементи $\varphi \in L^*$ називаються *функціоналами*.

Аналогічно визначається *другий* спряжений простір $L^{**} = (L^*)^*$ для $(L, \|\cdot\|_L)$ і

$$L \subset L^{**}.$$

B2.6. Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *рефлексивним*, якщо

$$L = L^{**}.$$

B2.7. Лінійний простір L над $\mathbf{C}$ називається *n-вимірним*, якщо існують лінійно незалежні $e_1, \ldots, e_n \in L$ такі, що $\forall\ a \in L, a \neq \theta$ елементи $a, e_1, \ldots, e_n \in L$ є лінійно залежними (тобто $\exists\ \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}\ :\ \alpha\, a + \ \alpha_1\, e_1 + \ldots + \ \alpha_n\, e_n = \theta$).

В цьому випадку елементи $e_1, \ldots, e_n \in L$ називаються базисом L і

$$L = \mathrm{Lin}\,\{e_1, \ldots, e_n\,\} \equiv \{\alpha_1\, e_1 + \ldots + \ \alpha_n e_n\ :\ \alpha_i \in \mathbf{C}, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі L називаються *еквівалентними*, якщо $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$:

$$\alpha\, \|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq \beta\, \|a\|_1 \qquad \forall\ a \in L.$$

Нехай норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі L є еквівалентними. Тоді послідовність $\{a_n\} \subset L$ збігається (фундаментальна) в $(L, \|\cdot\|_1)$

$\Leftrightarrow$ послідовність $\{a_n\}$ збігається (фундаментальна) в $(L, \|\cdot\|_2)$.

В цьому випадку нормовані простори $(L, \|\cdot\|_1)$ і $(L, \|\cdot\|_2)$ також називаються *еквівалентними.*

Крім того, нормовані простори $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ називаються *еквівалентними*, якщо існує лінійне взаємно однозначне відображення $\varphi\ :\ L \to H$ таке, що

$$\|a\|_L = \|\varphi(a)\|_H \qquad \forall\, a \in L.$$

Еквівалентні простори **ототожнюються** в теорії нормованих просторів.

Теорема 2.8. *Кожні дві норми* $\|\cdot\|_1$ *і* $\|\cdot\|_2$ *на* $\mathbf{C}^n$ (*відповідно на* $\mathbf{R}^n$) *є еквівалентними.* $\lhd \rhd$

Теорема 2.9. *Кожен нормований n-вимірний простір* $(L, \|\cdot\|_L)$ *над* $\mathbf{C}$ (*відповідно над* $\mathbf{R}$) *є еквівалентним* $\mathbf{C}^n$ (*відповідно* $\mathbf{R}^n$). $\lhd \rhd$

Позначимо через $C^0(\{1, \ldots, n\}, \mathbf{C})$ множину функцій (відображень) із множини $\{1, \ldots, n\}$ в $\mathbf{C}$.

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що такі функції є неперервними.)

Існує природне взаємно однозначне відображення

$$\varphi : C^0(\{1,\dots,n\},\mathbf{C}) \to \mathbf{C}^n.$$

Дійсно, $f : \{1,\dots,n\} \to \mathbf{C}$ зіставляє кожному $i \in \{1,\dots,n\}$ деяке число a_i яке визначає елемент a_i для $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{C}$.

Таким чином, лінійний простір

$$C[0,1] = C^0[0,1] = \{f : f \text{ неперервна функція із } [0,1] \text{ в } \mathbf{R}\}$$

є нескінченновимірним, оскільки множина $[0,1]$ є нескінченною.

B2.10. Множина $B \subset L$ є *щільною* у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$, якщо для кожного $a \in L$ і $\varepsilon > 0$

$$\exists\, b_\varepsilon \in B : \quad \|a - b_\varepsilon\|_L \le \varepsilon.$$

Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *сепарабельним*, якщо існує зчисленна множина $B \subset L$, яка щільна в $(L, \|\cdot\|_L)$.

B2.11. Множина $K \subset L$ називається (секвенційно) *відносно компактною* у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$, якщо для кожної послідовності $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ існують підпослідовність $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{a_n\}_{n=1}^\infty$ і елемент $a \in L$ такі, що

$$a_{n_k} \to a.$$

Множина $K \subset L$ є *компактною* у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$, якщо для кожної послідовності $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ існують підпослідовність $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{a_n\}_{n=1}^\infty$ і елемент $a \in K$ такі, що $a_{n_k} \to a$. (У "відносному" випадку $a \in L$ тільки).

Теорема 2.12. *Нехай множина $K \subset L$ є компактною у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$. Тоді K є повною.*

$\triangleleft$ Дійсно, якщо підпослідовність $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ є фундаментальною і $\varepsilon > 0$, тоді існують підпослідовність $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{a_n\}_{n=1}^\infty$ і елемент $a \in K$ такі, що

$$\|a - a_n\|_L \le \|a - a_{n_k}\|_L + \|a_{n_k} - a_n\|_L < 2\varepsilon$$

для достатньо великих n і n_k. $\triangleright$

В2.13. Нехай задано $\varepsilon > 0$. Множина $S_\varepsilon \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається ε-сіттю для множини $K \subseteq L$, якщо

$$\forall\, x \in K \qquad \exists\, x_\varepsilon \in S_\varepsilon \;\; : \qquad \|x - x_\varepsilon\|_L < \varepsilon.$$

Теорема 2.14 (Хаусдорф). *Множина $K \subset L$ є відносно компактною у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$* $\Rightarrow$

для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε-сіть $S_\varepsilon \subset L$ для K. $\quad \triangleleft\triangleright$

Теорема 2.15 (Хаусдорф). *Множина $K \subset L$ є відносно компактною у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$* $\Leftarrow$

L є повним і для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε-сіть $S_\varepsilon \subset L$ для K. $\triangleleft\triangleright$

Теорема 2.16. *Множина $K \subset L$ є відносно компактною у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$ $\Rightarrow$ K є обмеженою.*

$\triangleleft$ Нехай $S_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ це скінченна 1-сіть для K і $d = \max\limits_{1 \le i \le n} \|x_i\|_L$. Тоді для кожного $x \in K$ маємо

$$\|x\|_L \le \|x - x_i\|_L + \|x_i\|_L \le 1 + d. \qquad \triangleright$$

В2.17. Повний нормований простір $(\overline{L}, \|\cdot\|_L)$ називається *поповненням* нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$, якщо множина L є щільною в $(\overline{L}, \|\cdot\|_L)$.

Теорема 2.18 (про поповнення нормованих просторів). *Кожен нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ має єдине поповнення $(\overline{L}, \|\cdot\|_L)$.*

$\triangleleft$ Нехай нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ не є повним. Фундаментальні послідовності $\{a_n\}, \{b_n\} \subset L$ називаються *еквівалентними* (позначення: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$), якщо

$$\lim_{n \to \infty} \|a_n - b_n\|_L = 0.$$

Із нерівності трикутника випливає, що якщо $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ і $\{b_n\} \sim \{c_n\}$, тоді $\{a_n\} \sim \{c_n\}$.

Таким чином, множина всіх фундаментальних послідовностей із $(L, \|\cdot\|_L)$ розпадається на непересічні класи еквівалентних фундаментальних послідовностей. Позначимо через $\overline{L}$ множину таких класів (еквівалентних фундаментальних послідовностей). Якщо фундаментальна послідовність $\{a_n\}$ належить класу $\bar{a} \in \overline{L}$, тоді пишуть $\{a_n\} \in \bar{a}$. Якщо $\{a_n\}, \{b_n\} \subset L$ фундаментальні послідовності, тоді $\{a_n + b_n\} \subset L$ і $\{\alpha\, a_n\} \subset L$ для деякого $\alpha \in \mathbf{C}$ також є фундаментальні послідовності. Тому на $\overline{L}$ визначені операції додавання та множення на числа і нескладно перевірити, що $\overline{L}$ є лінійним простором.

Для $\{a_n\} \subset L$, із нерівності трикутника, маємо

$$\|a_n\|_L \le \|a_n - a_m\|_L + \|a_m\|_L \qquad \forall\, n, m \in \mathbf{N}$$

і тому

$$|\, \|a_n\|_L - \|a_m\|_L \,| \le \|a_n - a_m\|_L.$$

Отже, для кожної фундаментальної послідовності $\{a_n\} \subset L$ послідовність чисел $\alpha_n = \|a_n\|_L \subset \overline{\mathbf{R}}_+$ є фундаментальною і має границю $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Таким чином, для $\bar{a} \in \overline{L}$ такого, що $\{a_n\} \in \bar{a}$ визначено відображення

$$\bar{\eta}(\bar{a}) = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|_L \quad : \quad \overline{L} \to \overline{\mathbf{R}}_+.$$

Перевіримо, що це визначення не залежить від вибору фундаментальної послідовності $\{a_n\} \in \bar{a}$. Нехай $\{a_n\}, \{a'_n\} \in \bar{a}$ (тобто $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$). Тоді

$$\|a'_n\|_L \le \|a'_n - a_n\|_L + \|a_n\|_L,$$

$$\|a_n\|_L \le \|a_n - a'_n\|_L + \|a'_n\|_L$$

і

$$|\, \|a_n\|_L - \|a'_n\|_L \,| \le \|a_n - a'_n\|_L.$$

Таким чином, маємо

$$\bar{\eta}(\bar{a}) = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|_L = \lim_{n\to\infty} \|a'_n\|_L$$

(оскільки $\{a_n\} \sim \{a'_n\} \;\Rightarrow\; \lim \|a_n - a'_n\|_L = 0$) і це визначення відображення $\bar{\eta} \,:\, \overline{L} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ є коректним (не залежить від вибору $\{a_n\} \in \bar{a}$).

Крім того, маємо

$$\bar{\eta}(\bar{a}) = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \{a_n\} \sim \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \bar{0},$$

$$\bar{\eta}(\alpha\, \bar{a}) = \lim_{n\to\infty} \|\alpha\, a_n\|_L = \lim_{n\to\infty} \alpha\, \|a_n\|_L = \alpha\, \bar{\eta}(\bar{a}).$$

Із нерівності трикутника

$$\|a_n + b_n\|_L \le \|a_n\|_L + \|b_n\|_L$$

випливає (після переходу до $\lim_{n\to\infty}$), що

$$\bar\eta(\bar a + \bar b) \le \bar\eta(\bar a) + \bar\eta(\bar b).$$

Таким чином, відображення $\bar\eta$ є нормою на множині $\overline{L}$ і $(\overline{L}, \bar\eta)$ є нормованим простором.

Кожному $a \in L$ зіставимо у відповідність послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty}$. Такі послідовності називаються *стаціонарними* і є фундаментальні. Отже, визначене взаємно однозначне відображення φ із L в $L' \subset \overline{L}$, де L' є множиною класів фундаментальних послідовностей, що містять стаціонарні послідовності.

Для $a \in L$ маємо $\bar a = \varphi(a)$ належить L' і

$$\bar\eta(\varphi(a)) = \bar\eta(\bar a) = \lim_{n\to\infty} \|a\|_L = \|a\|_L,$$

де $\{a\}_{n=1}^{\infty} \in \bar a$. Таким чином, відображення φ встановлює еквівалентність і нормовані простори $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(L', \bar\eta)$ можна ототожнити.

Перевіримо, що L' щільно в $(\overline{L}, \bar\eta)$. Нехай $\bar a \in \overline{L}$ і $\{a_n\} \in \bar a$. Для кожного $k \in \mathbf{N}$ позначимо $\bar a_k = \varphi(a_k) \in L'$. За визначенням

$$\bar\eta(\bar a - \bar a_k) = \lim_{n\to\infty} \|a_n - a_k\|_L.$$

Послідовність $\{a_n\}$ є фундаментальною, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad : \quad \|a_n - a_k\|_L < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, n, k \ge N_\varepsilon.$$

Отже,

$$\bar\eta(\bar a - \bar a_k) = \lim_{n\to\infty} \|a_n - a_k\|_L \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \forall\, k \ge N_\varepsilon,$$

тобто $\forall\, \bar a \in \overline{L}$ і $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \bar b_\varepsilon \in L' : \bar\eta(\bar a - \bar b_\varepsilon) < \varepsilon$ (L' щільно в $(\overline{L}, \bar\eta)$).

Перевіримо, що $(\overline{L}, \bar\eta)$ є повним. Нехай $\{\bar a_n\} \subset \overline{L}$ є фундаментальною послідовністю. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ можна знайти $\bar b_n = \varphi(b_n) \in L'$ таке, що

$$\bar\eta(\bar a_n - \bar b_n) < \frac{1}{n}\ ,$$

де $\bar{b}_n = \varphi(b_n)$ є стаціонарною послідовністю відповідною $b_n \in L$ для $n \in \mathbf{N}$.

Послідовність $\{\bar{b}_n\} \subset \overline{L}$ є фундаментальною. Дійсно, для $\varepsilon > 0$ маємо

$$\bar{\eta}(\bar{b}_n - \bar{b}_m) \leq \bar{\eta}(\bar{b}_n - \bar{a}_n) + \bar{\eta}(\bar{a}_n - \bar{a}_m) + \bar{\eta}(\bar{a}_m - \bar{b}_m) < \frac{1}{n} + \bar{\eta}(\bar{a}_n - \bar{a}_m) + \frac{1}{m} \leq \varepsilon$$

для достатньо великих n і m, оскільки $\{\bar{a}_n\} \subset \overline{L}$ є фундаментальною.

Послідовність $\bar{b}_n = \varphi(b_n) \in L'$ є стаціонарною і тому

$$\bar{\eta}(\bar{b}_n - \bar{b}_m) = \|b_n - b_m\|_L.$$

Таким чином, послідовність $\{b_n\} \subset L$ є фундаментальною і існує елемент $\bar{b} \in \overline{L}$ такий, що $\{b_n\} \in \bar{b}$. Тоді для $\varepsilon > 0$ маємо

$$\bar{\eta}(\bar{b} - \bar{a}_n) \leq \bar{\eta}(\bar{b} - \bar{b}_n) + \bar{\eta}(\bar{b}_n - \bar{a}_n) < \lim_{k\to\infty} \|b_k - b_n\|_L + \frac{1}{n} \leq \|b_k - b_n\|_L + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

для достатньо великих k і n, оскільки $\{b_n\} \subset L$ є фундаментальною.

Отже, нормований простір $(\overline{L}, \bar{\eta})$ є повним.

Перевіримо, що поповнення $(\overline{L}, \bar{\eta})$ для $(L, \|\cdot\|_L)$ є єдиним (точніше, що поповнення $(\overline{L}, \bar{\eta})$ для $(L', \bar{\eta})$ є єдиним, проте $(L', \bar{\eta})$ і $(L, \|\cdot\|_L)$ ототожнюються).

Нехай $(\tilde{L}, \bar{\eta})$ є іншим повним нормованим простором таким, що L щільно в $(\tilde{L}, \bar{\eta})$. Тоді для $\tilde{a} \in \tilde{L}$ існує послідовність $\{a_n\} \subset L \subset \tilde{L}$ така, що

$$\bar{\eta}(\tilde{a} - a_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad (\text{тобто } a_n \to \tilde{a}\,).$$

Послідовність $\{a_n\} \subset L$ є фундаментальною і визначає єдиний елемент $\bar{a} \in \overline{L}$. Таким чином, кожному $\tilde{a} \in \tilde{L}$ відповідає єдиний елемент $\bar{a} \in \overline{L}$.

Нехай $\bar{b} \in \overline{L}$. Тоді визначена фундаментальна послідовність $\{b_n\} \subset L$ така, що $\{b_n\} \in \bar{b}$. Простір $(\tilde{L}, \bar{\eta})$ є повним. Тому існує $\tilde{b} \in \tilde{L}$ таке, що

$$\bar{\eta}(\tilde{b} - b_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad (\text{тобто } b_n \to \tilde{b}\,).$$

Таким чином, кожному $\bar{b} \in \overline{L}$ відповідає єдиний елемент $\tilde{b} \in \tilde{L}$ і

$$\bar{\eta}(\bar{a} - \bar{b}) = \lim_{n\to\infty} \|a_n - b_n\|_L = \bar{\eta}(\tilde{a} - \tilde{b}).$$

Отже, відображення $\bar{a} \mapsto \tilde{a}$ із $\overline{L}$ в $\tilde{L}$ встановлює еквівалентність цих просторів.

Якщо нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ є повним, тоді $(\overline{L}, \|\cdot\|_L) = (L, \|\cdot\|_L)$ є єдиним поповненням для $(L, \|\cdot\|_L)$. $\triangleright$

Приклад 2.19. Розглянемо для $a, b \in \mathbf{R} \, : \, a < b$ множину

$$C^0[a,b] = \{\, f : [a,b] \to \mathbf{C} \, : \, f \quad \text{є неперервною на } [a,b] \,\}$$

з нормами

$$\|f\|_0 = \max_{x \in [\,a,\,b]} |f(x)|,$$

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p \, d\,x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|_p$ для фіксованого p є нормами на лінійному просторі $C^0[a,b]$.)

Відомо, що $(C^0[a,b], \|\cdot\|_0)$ є банаховим простором, оскільки границя послідовності рівномірно неперервних функцій є рівномірно неперервною функцією.

З іншого боку, $(C^0[a,b], \|\cdot\|_p)$ не є повним нормованим простором. Дійсно, розглянемо, наприклад, $(C^0[-1,1], \|\cdot\|_1)$ і послідовність неперервних функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{для} \quad x \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ n\,x, & \text{для} \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ 1, & \text{для} \quad x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Для кожних $n, m \in \mathbf{N}$ маємо

$$\int\limits_{-1}^{1} |\, f_{n+m}(x) - f_n(x) \,| \, d\,x \ \le$$

$$\le \int\limits_{-1}^{1} |\, f_{n+m}(x) - \operatorname{sgn}(x) \,| \, d\,x + \int\limits_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x) - f_n(x) \,| \, d\,x = \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n}.$$

Таким чином, послідовність $\{f_n\}$ є фундаментальною в $(C^0[-1,1], \|\cdot\|_1)$ і має границю $\operatorname{sgn}(x)$, яка не є неперервною функцією.

Зокрема, норми $\|\cdot\|_0$ та $\|\cdot\|_p$ на $C^0[a,b]$ не є еквівалентними.

В2.20. Поповнення $(C^0[a,b], \|\cdot\|_p)$ для фіксованого p (при $1 \le p < \infty$) називається простором *Лебега інтегрованих у ступені* p функцій і позначається

$$(L^p(a,b), \|\cdot\|_p) = (\overline{C^0[a,b]}, \|\cdot\|_p).$$

3. Гільбертові простори.

В3.1. *Спряжено-білінійним* (або *півторалінійним*) функціоналом на лінійному просторі H над $\mathbf{C}$ називається всяке відображення

$$\varphi : H \times H \to \mathbf{C}$$

таке, що для $\forall\, \alpha, \beta, \delta \in \mathbf{C}$ і $\forall\, a, b, d \in H$ маємо:

$$1) \quad \varphi(\alpha\, a + \beta\, b, d) = \alpha\, \varphi(a, d) + \beta\, \varphi(b, d)\,;$$

$$2) \quad \varphi(a, \beta\, b + \delta\, d) = \overline{\beta}\, \varphi(a, b) + \overline{\delta}\, \varphi(a, d)\,,$$

де риса над числом позначає комплексне спряження.

В3.2. Спряжено-білінійний функціонал на лінійному просторі H називається *скалярним* (або *внутрішнім*) добутком, якщо для $\forall\, a, b \in H$ цей функціонал задовольняє умовам:

$$i) \qquad \varphi(a, b) = \overline{\varphi(b, a)}\,;$$

$$ii) \qquad \varphi(a, a) \geq 0\,;$$

$$iii) \quad \varphi(a, a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \theta\,.$$

Лінійний простір H із деяким скалярним добутком $\varphi(\cdot, \cdot)$ називається *передгільбертовим простором* (H, φ).

Лінійний простір $L \subset H$ називається *підпростором* передгільбертового простору (H, φ) і є передгільбертовим простором (L, φ).

Зазвичай позначають $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle_H$, $\varphi(a, b) = (a, b)_H$ або $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle$.

Наприклад, на $\mathbf{C}^n$ скалярний добуток можна визначити рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k} \qquad \text{для} \quad a = (a_1, \ldots, a_n),\; b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{C}^n$$

або рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k,h=1}^{n} A_{kh} a_k \overline{b_h} \qquad \text{для} \quad a,\, b \in \mathbf{C}^n, \quad A_{kh} \in \mathbf{C}, \quad k, h = 1 \ldots, n\,,$$

де матриця $A = \{A_{kh}\}_{k,h=1}^{n}$ є ермітовою і додатною, тобто $A_{kh} = \overline{A_{hk}}$ і

$$\sum A_{kh} a_k \overline{a_h} > 0 \qquad \text{для} \quad a \neq \theta\,.$$

На множині квадратично сумовних послідовностей

$$l^2(\mathbf{C}) \;=\; \{\, a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \;:\quad \sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2 < \infty, \quad a_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \ldots, n, \ldots\}$$

скалярний добуток можна визначити, наприклад, рівністю

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} \qquad \text{для} \quad a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots),\, b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in l^2(\mathbf{C})$$

(де збіжність ряду випливає із відомої оцінки $|\, a_k \overline{b_k}| \le \frac{1}{2}\,(|\, a_k\,|^2 + |\; b_k\,|^2)$).

Теорема 3.3 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца). *Для передгільбертового простору* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *визначимо*

$$\|\, a\,\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}\,, \qquad a \in H\,.$$

Тоді

$$|\langle a, b\rangle| \le \|\, a\,\| \|\, b\,\|\,, \qquad a, b \in H\,.$$

$\triangleleft$ (**Завдання для самостійної роботи.**) $\triangleright$

Використовуючи цю нерівність, можна визначити *кут* ϕ між двома ненульовими елементами $a, b \in H$ із рівності

$$\cos(\phi) = \frac{|\langle a, b\rangle|}{\|\, a\,\| \|\, b\,\|}\,.$$

Зокрема, елементи $a, b \in H$ називаються *ортогональними*, якщо $\langle a, b\rangle = 0$.

Система елементів $e_\nu \in H$ для деякої множини індексів $\nu \in \Lambda$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\langle e_\nu, e_\kappa\rangle = 0 \quad \text{для} \quad \nu \ne \kappa \qquad \text{і} \qquad \|\, e_\nu\| = 1 \quad \text{для} \quad \nu, \kappa \in \Lambda\,.$$

Теорема 3.4. *Для передгільбертового простору* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *відображення*

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle} \;:\; H \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

є нормою, тобто:

$$1) \quad \|\, a\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \theta\,; \qquad 2) \quad \|\, \alpha\, a\| = |\alpha|\, \|\, a\|\,;$$

$$3) \quad \|\, a + b\| \le \|\, a\| + \|\, b\|\,.$$

$\triangleleft$ (**Завдання для самостійної роботи.**) $\triangleright$

Таким чином, $(H, \|\cdot\|)$ є *нормованим простором.*

Передгільбертові простори $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ і $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ називаються *еквівалентними*, якщо вони еквівалентні як нормовані простори $(H_1, \|\cdot\|_1)$ і $(H_2, \|\cdot\|_2)$.

Еквівалентні простори **ототожнюються** в теорії гільбертових **просторів.**

В3.5. Передгільбертовий простір $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ називається *гільбертовим*, якщо нормований простір $(H, \|\cdot\|)$ є повним (та нескінченновимірним).

Теорема 3.6 (про поповнення гільбертових просторів). *Кожен передгільбертовий простір* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *має єдине гільбертове поповнення* $(\overline{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

$\lhd$ Відомо, що $(H, \|\cdot\|)$ має єдине поповнення $\widetilde{H}$ (що складається із класів еквівалентних фундаментальних послідовностей) як нормований простір і залишається перевірити, що $\widetilde{H}$ є гільбертовим простором.

Нехай $\tilde{a}, \tilde{b} \in \widetilde{H}$ і $\{a_n\}, \{b_n\} \subset H$ фундаментальні послідовності такі, що $\{a_n\} \in \tilde{a}, \{b_n\} \in \tilde{b}$. Визначимо

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle a_n, b_n \rangle \, .$$

Ця границя існує, оскільки для $n, m \in \mathbf{N}$

$$|\langle a_n, b_n\rangle - \langle a_m, b_m\rangle| \le \|a_m - a_n\|\|b_m\| + \|b_m - b_n\|\|a_n\| \, ,$$

тому послідовність чисел $\{\langle a_n, b_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ є фундаментальною і має границю. Аналогічно перевіряється, що ця границя не залежить від вибору послідовностей $\{a_n\} \in \tilde{a}, \{b_n\} \in \tilde{b}$ і визначає скалярний добуток на $\widetilde{H}$. Тобто $\overline{H} = \widetilde{H}$. $\rhd$

Приклад 3.7. Розглянемо для $a, b \in \mathbf{R} \, : \, a < b$ множину

$$C^0[a,b] = \{\, f : [a,b] \to \mathbf{C} \, : \, f \quad \text{є неперервною на } [a,b] \,\}$$

із скалярним добутком

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)} \; d\,x, \qquad \forall\, f, g \in C^0[a,b].$$

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що $\langle f, g\rangle$ є скалярним добутком на лінійному просторі $C^0[a,b]$.)

Таким чином, простір $(C^0[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ є передгільбертовим і нерівність Коші-Буняковського-Шварца має вигляд

$$\left| \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, d\,x \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2\, d\,x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2\, d\,x \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, f,g \in C^0[a,b]\,.$$

Норма на цьому просторі визначається рівністю

$$\|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, d\,x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Простір $(C^0[a,b], \|\cdot\|_2)$ не є гільбертовим (тобто повним), оскільки існують послідовності, що збігаються до функції $\operatorname{sgn}(x-(a+b)/2)$, яка не є неперервною.

В3.8. Поповнення $(C^0[a,b], \|\cdot\|_2)$ називається простором *квадратично інтегрованих* функцій і позначається

$$(L^2(a,b), \|\cdot\|_2) = (\overline{C^0[a,b]}, \|\cdot\|_2)\,.$$

Таким чином, простір $(L^2(a,b), \|\cdot\|_2)$ складається із "функцій", які можуть бути наближені неперервними функціями, тобто для $f \in L^2(a,b)$ і

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C^0[a,b]\,: \quad \|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon\,.$$

Зокрема, для $f \in L^2(a,b)$ є визначеним інтеграл $\int_a^b f\, d\,x$, як границя інтегралів від $\int_a^b f_\varepsilon\, d\,x$, тобто рівністю

$$\int_a^b f(x)\, d\,x = \langle f, 1\rangle\,.$$

Такий інтеграл називається *інтегралом Лебега.*

Нехай $L \subset H$ є підпростір передгільбертового простору $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Елемент $a \in H$ називається *ортогональним* підпростору L, якщо

$$\langle a, l\rangle = 0 \qquad \forall\, l \in L\,.$$

В цьому випадку пишуть $a \perp L$.

Нехай $a \in H$. Елемент $l_a \in L$ називається *ортогональною проекцією* a в підпростір $L \subset H$, якщо $\quad \langle a - l_a, l\rangle = 0 \quad \forall\, l \in L$.

Коли така проекція існує, то пишуть $l_a = \mathrm{Pr}_L(a)$ і така проекція l_a є єдиною. Дійсно, якщо $l_1, l_2 \in L$ такі, що

$$\langle a - l_1, l \rangle = 0\,, \quad \langle a - l_2, l \rangle = 0 \qquad \forall\, l \in L\,,$$

тоді $\langle l_2 - l_1, l \rangle = 0 \quad \forall\, l \in L$ і $\langle l_2 - l_1, l_2 - l_1 \rangle = 0$, тобто $l_2 = l_1$.

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що $l_{\alpha a} = \alpha l_a$ і $l_{a+b} = l_a + l_b$, тобто $\mathrm{Pr}_L(\alpha a) = \alpha \mathrm{Pr}_L(a)$ і $\mathrm{Pr}_L(a+b) = \mathrm{Pr}_L(a) + \mathrm{Pr}_L(b)$ для $a, b \in H$ і $\alpha \in \mathbf{C}$.)

Лема 3.9 (закон паралелограма). *Нехай* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *є передгільбертовий простір. Тоді*

$$\|\, a + b \,\|^2 + \|\, a - b \,\|^2 = 2 \,\|\, a \,\|^2 + 2 \,\|\, b \,\|^2 \qquad \forall\, a, b \in H\,.$$

$\triangleleft$ Перевіряється безпосередньо, оскільки $\|\, a + b \,\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle\,.$ $\triangleright$

Теорема 3.10 (про існування єдиної ортогональної проекції). *Нехай* $L \subset H$ *є повний підпростір передгільбертового простору* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ і $a \in H$. *Тоді*

$$\exists\ 1\ l_a = \mathrm{Pr}_L(a) \qquad i \qquad \|\, a - l_a \| \ = \ \inf_{l \in L} \|\, a - l \,\|\,.$$

$\triangleleft$ Позначимо через η_k мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{k \to \infty} \|\, a - \eta_k \,\| = d = \inf_{l \in L} \|\, a - l \,\|\,. \tag{3.1}$$

Існування такої послідовності випливає із визначення інфінума. Із закону паралелограма

$$\|\, d + b \,\|^2 + \|\, d - b \,\|^2 = 2 \,\|\, d \,\|^2 + 2 \,\|\, b \,\|^2 \qquad \forall\, d, b \in L$$

при $d = a - \eta_k$ і $b = a - \eta_h$ отримуємо

$$\|\, \eta_k - \eta_h \,\|^2 = 2 \,\|\, a - \eta_k \,\|^2 + 2 \,\|\, a - \eta_h \,\|^2 - 4 \left\|\, a - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \right\|^2 .$$

Множина L є підпростором, тому $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \in L$ і $d^2 \le \left\|\, a - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \,\right\|^2$. Отже,

$$\|\, \eta_k - \eta_h \,\|^2 \le 2 \,\|\, a - \eta_k \,\|^2 + 2 \,\|\, a - \eta_h \,\|^2 - 4\, d^2$$

і послідовність $\{\eta_k\} \subset L$ є фундаментальною завдяки (3.1).

Таким чином, існує $l_a \in L$ таке, що $\lim_{k\to\infty} \eta_k = l_a$ та виконані наступні рівності $\| a - l_a \| = \lim_{k\to\infty} \| a - \eta_k \| = d$.

Припустимо, що $l \in L$ і $l \neq \theta$. Тоді $\eta_k + \varepsilon\, l \in L$ для $\varepsilon \in \mathbf{C}$ і

$$\| a - (\eta_k + \varepsilon\, l) \|^2 \geq\, d^2,$$

тобто

$$\| a - \eta_k \|^2 -\, \overline{\varepsilon}\, \langle a - \eta_k, l \rangle -\, \varepsilon\, \langle l, a - \eta_k \rangle +\, |\varepsilon|^2\, \| l \|^2 \geq\, d^2.$$

При $\varepsilon = \frac{\langle a - \eta_k, l\rangle}{\| l \|^2}$ маємо

$$\| a - \eta_k \|^2 -\, d^2 \,\geq\, \frac{|\langle a - \eta_k, l \rangle|^2}{\| l \|^2}\,.$$

Звідки при $k \to \infty$ отримуємо $\langle a - l_a, l \rangle = 0 \quad \forall\, l \in L\,.$ $\triangleright$

Лема 3.11. *Нехай* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *є передгільбертовий простір і* $a \in H$. *Тоді функціонал*

$$f(x) = \langle x, a \rangle \qquad \forall\, x \in H$$

є лінійним і обмеженим (тобто $f \in B(H, \mathbf{C})$*). Крім того,*

$$\| f \|_B = \| a \|_H = \sqrt{\langle a, a \rangle}\,.$$

$\triangleleft$ Лінійність $f(\cdot)$ випливає із лінійності $\langle\cdot, a\rangle$, а обмеженість із нерівності

$$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \| x \|_H \| a \|_H \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Крім того, маємо $f(a) = \| a \|_H \| a \|_H$, тобто $\| f \|_B = \| a \|_H\,.$ $\triangleright$

Лема 3.12. *Нехай* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *є передгільбертовий простір і* $f \in B(H, \mathbf{C})$ *такий, що*

$$f(x) = \langle x, a \rangle \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Тоді $a \in H$ *визначено однозначно.*

$\triangleleft$ Нехай $a, b \in H$ такі, що

$$f(x) = \langle x, a \rangle\,, \quad f(x) = \langle x, b \rangle \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Тоді $\langle x, a - b \rangle = 0\; \forall\, x \in H$. Зокрема, $\langle a - b, a - b \rangle = 0$, тобто $a = b\,.$ $\triangleright$

Теорема 3.13 (Рісс). *Нехай* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *є гільбертовий простір і* $f \in B(H, \mathbf{C})$. *Тоді*

$$\exists\, 1 \;\; a \in H \;\; : \qquad f(x) = \langle x, a\rangle \qquad \forall\, x \in H\,.$$

$\lhd$ Позначимо

$$L = \{x \in H \;:\quad f(x) = 0\,\}\,.$$

Із лінійності f випливає, що L лінійний підпростір в H. Крім того, L є повним. Дійсно, якщо $\{a_n\} \subset L$ є фундаментальною послідовність, тоді

$$\exists\, a \in H \;:\quad a_n \to a\,,$$

оскільки H є повним, та $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$, тобто $a \in L$.

Якщо $L = H$, тоді $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in H$ і

$$\exists\, 1 \;\; \theta \in H \;\; : \qquad f(x) = \langle x, \theta\rangle \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Нехай $L \neq H$, тоді $\exists\, a \in H$ такий, що $f(a) \neq 0$.

Позначимо через $l_a \in L$ ортогональну проекцію a на L і визначимо

$$b = a - l_a\,.$$

Тоді $\langle b, l\rangle = 0 \quad \forall\, l \in L$ і $f(b) = f(a) \neq 0$.

Із лінійності f випливає, що

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(b)}\, b\right) = 0 \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Таким чином, маємо

$$\forall\, x \in H \qquad x - \frac{f(x)}{f(b)}\, b\, \in L$$

і тому

$$\langle\, x - \frac{f(x)}{f(b)}\, b, b\,\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in H$$

за визначенням ортогональної проекції. Отже, маємо рівність

$$\langle\, x, b\,\rangle = f(x)\,\frac{\|b\|^2}{f(b)} \qquad \forall\, x \in H.$$

Звідки, позначаючи $a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2}\, b$, отримуємо, що

$$\exists\, 1 \;\; a \in H \;\; : \qquad f(x) = \langle x, a\rangle \qquad \forall\, x \in H\,. \qquad \rhd$$

Таким чином, множину лінійних обмежених функціоналів $B(H, \mathbf{C})$ на гільбертовому простору H можна ототожнити (як нормований простір) із H, тобто $H^* = H$. Зокрема, $H = H^{**}$ і тому гільбертові простори є рефлексивними.

В3.14. Нехай $X, Y \subset H$ є заданими підпросторами лінійного простору H. Тоді $H = X \oplus Y$ є *прямою сумою* X і Y, якщо

$$\forall\, a \in H \quad \exists\, 1\ x_a\,,\, y_a\,: \qquad a = x_a + y_a\,, \qquad \text{де} \quad x_a \in X \quad \text{і} \quad y_a \in Y.$$

Крім того, якщо H є гільбертовим простором $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ і $X \perp Y$ (тобто $\langle x, y\rangle_H = 0$ для $x \in X, y \in Y$), тоді

$$H = X \oplus Y$$

є *прямою ортогональною сумою* X і Y.

Теорема 3.15 (про розкладання у пряму ортогональну суму). *Нехай $L \subset H$ є повний підпростір гільбертового простору $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$. Тоді*

$$H = L \oplus L^{\perp}\,,$$

де $L^{\perp} = \{h \in H\,:\, \langle h, l\rangle_H = 0 \quad \forall\, l \in L\,\}$.

$\triangleleft$ Дійсно, визначимо $l_a = \mathrm{Pr}_L(a) \in L$ і $h_a = a - l_a \in L^{\perp}$. Тоді $a = l_a + h_a$. $\triangleright$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що

$$L^2(0,1) = \mathbf{C} \oplus \{h \in L^2(0,1)\,:\, \int_0^1 h(x)\,d\,x\; = 0\,\}.\,)$$

Теорема 3.16 (про повноту ядра оператора). *Нехай L є повним нормованим простором, H є нормованим простором і $A \in B(L, H)$. Тоді*

$$\mathrm{Ker}\, A = \{\, x \in L\,:\, Ax = 0\,\} \quad \text{\textit{є повним підпростором}} \quad L.$$

$\triangleleft$ **Завдання для самостійної роботи.** $\triangleright$

Теорема 3.17 (про повноту образа оператора). *Нехай L і H є повними нормованими просторами, $A \in B(L, H)$ і існує стала α така, що*

$$\alpha\,\|x\|_L \le \|Ax\|_H \qquad \forall\, x \in L.$$

Тоді $\mathrm{Im}\, A = \{\, y \in H\,:\, y = Ax \quad \text{для} \quad x \in L\,\}$ *є повним підпростором* H.

Крім того, для кожного $y \in \mathrm{Im}\, A \quad \exists\, 1\ x \in L\,:\, Ax = y$.

$\triangleleft$ **Завдання для самостійної роботи.** $\triangleright$

4. Простори Соболєва.

Теорема 4.1 (про продовження операторів по неперервності). *Нехай оператор $A \in B(L,Y)$, де Y є банаховим простором і лінійний простір $L \subset X$ є щільним в лінійному нормованому просторі X.*

Тоді $\exists 1\ \overline{A} \in B(X,Y)$:

$$\overline{A}(x) = A(x) \qquad \forall x \in L \qquad i \qquad \| \overline{A} \|_{B(X,Y)} = \| A \|_{B(L,Y)} .$$

$\triangleleft$ Нехай $x \in X$ і $x \notin L$. Тоді існує $\{x_n\} \subset L$ така, що

$$x_n \to x ,$$

оскільки L є щільним в X. Із нерівності

$$\| A(x_n) - A(x_m) \|_Y \leq \| A \|_{B(L,Y)} \| x_n - x_m \|_L$$

випливає, що послідовність $\{A(x_n)\} \subset Y$ є фундаментальною і має границю, оскільки Y є банаховим простором. Визначимо

$$\overline{A}(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n)$$

і перевіримо, що це визначення не залежить від вибору послідовності $\{x_n\} \subset L$.

Нехай $\{x'_n\} \subset L$ така, що $x'_n \to x$ і

$$y = \lim_{n\to\infty} A(x_n) , \qquad y' = \lim_{n\to\infty} A(x'_n) .$$

Тоді

$$\| y - y' \|_Y \leq \| y - A(x_n) \|_Y + \| A(x_n) - A(x'_n) \|_Y + \| A(x'_n) - y' \|_Y \leq$$

$$\leq \| y - A(x_n) \|_Y + \| A \|_{B(L,Y)} \| x_n - x'_n \|_L + \| A(x'_n) - y' \|_Y \to 0 ,$$

тобто $y = y'$.

Лінійність $\overline{A}$ випливає із лінійності A і лінійності границі. Крім того,

$$\| A(x_n) \|_Y \leq \| A \|_{B(L,Y)} \| x_n \|_L$$

і тому

$$\| \overline{A}(x) \|_Y \le \| A \|_{B(L,Y)} \| x \|_L,$$

тобто $\| \overline{A} \|_{B(X,Y)} \le \| A \|_{B(L,Y)}$. З іншого боку, при продовженні оператора норма цього оператора не може зменшитися, отже, маємо рівність

$$\| \overline{A} \|_{B(X,Y)} = \| A \|_{B(L,Y)} .$$

Нехай $\overline{A}_1 \in B(X,Y)$ і $\overline{A}_2 \in B(X,Y)$ такі, що

$$\overline{A}_1(x) = \overline{A}_2(x) = A(x) \qquad \forall x \in L .$$

Для доведення єдиності необхідно перевірити, що

$$\overline{A}_1(x) = \overline{A}_2(x) \qquad \forall x \in X.$$

Виберемо $x \in X$ таке, що $x \notin L$. Тоді існує послідовність $\{x_n\} \subset L$ така, що

$$x_n \to x ,$$

оскільки L є щільним в X . Таким чином, маємо рівність

$$\overline{A}_1(x_n) = \overline{A}_2(x_n) .$$

Враховуючи неперервність $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in B(X,Y)$ і обчислюючи $\lim_{n\to\infty}$, отримуємо

$$\overline{A}_1(x) = \overline{A}_2(x) . \qquad \triangleright$$

B4.2. Відкрита обмежена зв'язна підмножина $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ називається *областю* у $\mathbf{R}^n$. Замикання області Ω в $\mathbf{R}^n$ позначається $\overline{\Omega}$ (і є компактною множиною), а

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$$

називається *межею* цієї області.

Наприклад, $\Omega = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1 \}$ є відкритою кулею в $\mathbf{R}^n$,

$$\overline{\Omega} = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| \le 1 \}$$

є замкнутою кулею і $\partial\Omega = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1 \}$ називається одиничною сферою.

Розглянемо для області Ω в $\mathbf{R}^n$ лінійний простір

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{\, f : \overline{\Omega} \to \mathbf{C} \,:\, f \quad \text{є неперервною на } \overline{\Omega}\,\}\,.$$

Теорема 4.3 (нерівність Гельдера). *Для* $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ *виконана нерівність*

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)\; d\,x\right| \le \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\; d\,x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} |g(x)|^q\; d\,x\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{де} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

і $1 < p < \infty$. *Зокрема*

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x)\, d\,x\right| \le \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\, d\,x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} 1\; d\,x\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\, d\,x\right)^{\frac{1}{p}} (\mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{1}{q}}\,. \quad \triangleleft\ \triangleright$$

Розглянемо на $C^0(\overline{\Omega})$ норми

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\; d\,x\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p\,,$$

де $\lim_{p\to\infty}$ існує, оскільки неперервні функції обмежені ($|f(x)| \le M$) і тому обмежена послідовність чисел $\|f\|_p$ ($\|f\|_p \le M\,\mathrm{mes}(\Omega)^{1/p} \le M\,\mathrm{mes}(\Omega)$, наприклад, якщо $\mathrm{mes}(\Omega) \ge 1$), крім того, ця послідовність є монотонною.

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити нерівність Гельдера, використовуючи те, що

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \qquad \text{для} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \text{і} \qquad \alpha, \beta \ge 0$$

і обираючи $\alpha = \frac{|f|}{\|f\|_p}$, $\beta = \frac{|g|}{\|g\|_q}$ при $\|f\|_p \ne 0$, $\|g\|_q \ne 0$ і $f, g \in C^0[a,b]$.)

В4.4. Поповнення $(C^0(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$ для фіксованого p називається простором *Лебега інтегрованих у ступені* p функцій і позначається

$$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p) = (\,\overline{C^0(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_p)\,.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що $\|\cdot\|_p$ є нормою для $C^0(\overline{\Omega})$ і

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 \le q \le p \le \infty\,.$$

Зокрема, $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ при $1 \le p \le \infty$.)

Таким чином, простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ складається із "функцій", які можуть бути наближені неперервними функціями, тобто для $f \in L^p(\Omega)$ і

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, f_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}) \; : \quad \|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon\,.$$

Для $f \in C^0(\overline{\Omega})$ є визначеним лінійний інтеграл $\int\limits_\Omega f\, d\,x$. Із нерівності Гельдера випливає, що цей інтеграл є обмеженим відображенням із $C^0(\overline{\Omega})$ в $\mathbf{C}$. Таким чином, із теорем 4.1 і 4.3 випливає, що для $f \in L^p(\Omega)$ є визначеним лінійний інтеграл (такий інтеграл називається *інтегралом Лебега*) і

$$\left| \int\limits_\Omega f(x)\; d\,x \right| \le (\mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{1}{q}}\, \|\, f\,\|_p\,.$$

Нехай $A \subset \overline{\Omega}$. Визначимо функцію $\chi_A(x)$ рівністю $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$ і $\chi_A(x) = 0$ при $x \in \overline{\Omega} \setminus A$. Така функція називається *характеристичною* функцією множини $A \subset \overline{\Omega}$.

В4.5. Множина $A \subset \overline{\Omega}$ називається *вимірною*, якщо $\chi_A(x) \in L^1(\Omega)$. Функція $f \,:\, \overline{\Omega} \to \mathbf{C}$ називається (абсолютно) *інтегрованою*, якщо $f \in L^1(\Omega)$.

Міра Лебега $\mathrm{mes}\,(A)$ вимірної множини $A \subset \overline{\Omega}$ визначається рівністю

$$\mathrm{mes}\,(A) = \int\limits_A d\,x \; = \int\limits_\Omega \chi_A\, d\,x\,.$$

Теорема 4.6. *Міра Лебега вимірної множини* $A \subset \overline{\Omega}$ *є рівною нулю (тобто* $\mathrm{mes}(A) = 0)$ $\quad\Leftrightarrow\quad \forall\, \varepsilon > 0$ *існує множина кубів* $K_1, K_2, \ldots, K_k \ldots$ *така, що*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \qquad i \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |K_k| \,<\varepsilon\,,$$

де $|K_k| = |\, b_k - a_k|^n$ *позначає об'єм куба* $K_k = [a_k, b_k]^n$ *і* $k = 1, 2\, \ldots$. ◁ ▷

Відомо, що $L^p(\Omega)$ складається із класів еквівалентності інтегрованих функцій, де f і g належать одному класу, якщо $f = g$ майже усюди, тобто

$$\mathrm{mes}\,(\{\, x \in \Omega \,:\, f \ne g\,\}) \;=\; 0\,.$$

Крім того, відомо, що $L^p(\Omega) = \{\, f$ є інтегрованою : $\|f(x)\|_p < \infty\}$ при $1 \le p < \infty$. Визначимо

$$\widetilde{L}^\infty(\Omega) = \{\, f \;\text{ є інтегрованою } \;:\quad \|f(x)\|_\infty < \infty\,\}\,.$$

Тоді $L^\infty(\Omega) \subset \widetilde{L}^\infty(\Omega)$.

Теорема 4.7 (Лузін Н.Н.). *Функція* $f : \overline{\Omega} \to \mathbf{C}$ *є інтегрованою* $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}) : \qquad \mathrm{mes}\,(\{ x \in \Omega : f \neq f_\varepsilon \}) < \varepsilon . \qquad \triangleleft \triangleright$$

При $p = 2$ простір $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$\langle u, v \rangle_2 = (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\, x .$$

Для такого гільбертового простору була доведена наступна теорема.

Теорема 4.8 (Рісс). *Нехай* $f \in B(L^2(\Omega), \mathbf{C})$. *Тоді*

$$\exists\, 1 \;\; v \in L^2(\Omega) \; : \qquad f(u) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\, x \qquad \forall\, u \in L^2(\Omega) . \qquad \triangleleft \triangleright$$

Аналогічна теорема виконана для просторів $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ при $1 < p < \infty$.

Теорема 4.9. *Нехай* $f \in B(L^p(\Omega), \mathbf{C})$ *при* $1 < p < \infty$. *Тоді*

$$\exists\, 1 \;\; v \in L^q(\Omega) \; : \qquad f(u) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\, x \qquad \forall\, u \in L^p(\Omega) ,$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *Крім того,* $\widetilde{L}^\infty(\Omega) = B(L^1(\Omega), \mathbf{C})$, *але* $L^1(\Omega) \neq B(\widetilde{L}^\infty(\Omega), \mathbf{C})$. $\triangleleft \triangleright$

Ця теорема означає, що простори $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ і $(L^q(\Omega), \| \cdot \|_q)$ взаємно спряжені:

$$L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega), \quad L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega) \qquad \text{при} \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \qquad \text{і} \qquad 1 < p < \infty .$$

Крім того, $L^1(\Omega)^* = \widetilde{L}^\infty(\Omega)$, але $\widetilde{L}^\infty(\Omega)^* \neq L^1(\Omega)$. Зокрема, при $1 < p < \infty$ простір $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ є рефлексивним, оскільки

$$L^p(\Omega) = L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega)^{**} .$$

У просторі $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ інтеграл є визначеним. Для визначення диференціювання на $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ необхідні додаткові визначення.

В4.10. Межа $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має *клас* $C^k, k \geq 1$, якщо $\partial\Omega$ є компактною і для кожного $x \in \partial\Omega$ існує відкрита множина $U \subset \mathbf{R}^n$, $x \in U$ і взаємно однозначне відображення $\psi : B = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1 \} \to U$ такі, що

$$\psi \in C^k(\overline{B}), \quad \psi^{-1} \in C^k(\overline{U}), \quad \psi(B_+) = U \cap \Omega, \quad \psi(B_-) = U \cap (\mathbf{R} \setminus \overline{\Omega}), \quad \psi(B_0) = U \cap \partial\Omega,$$

де $B_+ = \{ x \in B : x_n > 0 \}$, $B_- = \{ x \in B : x_n < 0 \}$ і $B_0 = \{ x \in B : x_n = 0 \}$.

Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має *ліпшицеву межу* $\partial\Omega$, якщо $\psi \in \mathrm{Lip}(\overline{B})$, $\psi^{-1} \in \mathrm{Lip}(\overline{U})$, де, наприклад, за визначенням $\psi \in \mathrm{Lip}(\overline{B})$, якщо

$$\exists\, L > 0 \ : \quad |\psi(x) - \psi(y)| \le L|x - y| \qquad \forall\, x, y \in \overline{B}\,.$$

Теорема 4.11 (Радемахер.) $\psi \in \mathrm{Lip}(\overline{B}) \Rightarrow \nabla\psi \in \widetilde{L}^\infty(B)^n$. *Зокрема, якобіан* $J(\psi) \in \widetilde{L}^\infty(B)$. $\triangleleft\triangleright$

Надалі розглядаються тільки області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, що мають **ліпшицеві межі**.

Визначимо на лінійному просторі

$$C^1(\overline{\Omega}) = \{\, v \in C^0(\overline{\Omega}) \ : \ \nabla v \in C^0(\overline{\Omega})^n \,\}$$

норми

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^n} \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \qquad 1 \le p < \infty\,,$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}} = \max\Big\{\, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \Big\} \quad \text{при} \qquad p = \infty\,,$$

де $L^p(\Omega)^n = L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega) = \{\, (f_1, \ldots, f_n) \ : \ f_k \in L^p(\Omega), \quad k = 1, \ldots, n \,\}$.

В4.12. Поповнення нормованого простору $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty$$

і називається простором *Соболєва першого порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω. Зокрема, для елементів із $W^{1,p}(\Omega)$ визначені інтеграл і диференціювання. У відповідності із наступним твердженням.

Теорема 4.13. *Розглянемо градієнт* ∇ *як оператор із* $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ *в* $(L^p(\Omega)^n, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^n})$ *при* $1 \le p \le \infty$. *Тоді* $\nabla \in B(C^1(\overline{\Omega}), L^p(\Omega)^n)$ *і*

$$\exists\, 1 \quad \overline{\nabla} \in B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n) \ : \qquad \overline{\nabla}(v) = \nabla(v) \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

та $\|\, \overline{\nabla}\, \|_{B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n)} = 1$.

$\triangleleft$ Нехай $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Тоді $\nabla u \in C^0(\overline{\Omega})^n \subset L^p(\Omega)^n$ і

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n} \le \Big(\, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^n} \Big)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{при} \qquad 1 \le p < \infty\,,$$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \le \max\Big\{\, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \Big\} = \|u\|_{W^{1,\infty}} \quad \text{при} \qquad p = \infty\,.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. $\quad \triangleright$

В4.14. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \le p \le \infty$ і $E \subset \overline{\Omega}$. За визначенням

$$u \ge 0 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega),$$

якщо існує послідовність $\{u_n\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ така, що

$$u_n \ge 0 \quad \forall\, x \in E \qquad \text{і} \qquad u_n \to u \quad \text{у нормі} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Якщо $-u \ge 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді пишуть $u \le 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$. Відповідно, якщо $u \ge 0$ і $u \le 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді за визначенням

$$u = 0 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Для цілого $l \ge 1$ визначимо лінійні простори

$$C^l(\overline{\Omega}) = \{\, v \in C^0(\overline{\Omega}) \,:\, \nabla v \in C^0(\overline{\Omega})^n, \ldots, \nabla^l v \in C^0(\overline{\Omega})^{n^l} \,\},$$

$$C^l(\mathbf{R}^n) = \{\, v \in C^0(\mathbf{R}^n) \,:\, \nabla v \in C^0(\mathbf{R}^n)^n, \ldots, \nabla^l v \in C^0(\mathbf{R}^n)^{n^l} \,\},$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\overline{\Omega}), \qquad C^\infty(\mathbf{R}^n) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\mathbf{R}^n)$$

і розглянемо лінійний простір функцій, що є нескінченно диференційованими і мають компактні носії

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\, v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \,:\, \operatorname{supp} v \subset \Omega \,\},$$

де $\operatorname{supp} v = \overline{\{\, x \in \Omega \,:\, v(x) \ne 0 \,\}}$ називається *носієм* функції v.

Теорема 4.15. *Простір* $C_0^\infty(\Omega)$ *щільний в* $L^p(\Omega)$ *при* $1 \le p < \infty$, *тобто для* $f \in L^p(\Omega)$ *і*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon.$$

Простір $C^\infty(\overline{\Omega})$ *щільний в* $W^{1,p}(\Omega)$ *при* $1 \le p \le \infty$ *і в* $L^\infty(\Omega)$. *Зокрема, ці простори можуть бути визначені як поповнення* $C_0^\infty(\Omega)$ і $C^\infty(\overline{\Omega})$:

$$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p) = (\,\overline{C_0^\infty(\Omega)}, \|\cdot\|_p), \quad (L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty) = (\,\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_\infty),$$

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) = (\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

B4.16. Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty.$$

За визначенням, якщо $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ тоді

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Крім того, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{1,p}(\Omega)$.

(**Завдання для самостійної роботи:**

1. Нехай $\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^n \;:\; |x| < 1 \,\}$, $s > 0$ і

$$\psi(x) = |x|^{-s}\,.$$

Перевірити, що

$$\psi \in L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p\,s < n; \qquad \psi \in W^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p\,(s+1) < n\,;$$

$$(\psi - 1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p\,(s+1) < n.$$

2. Нехай $\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^n \;:\; |x| < 1 \,\}$ і

$$u(x) = \frac{x}{|x|}\,.$$

Перевірити, що $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)^n$ при $1 \le p < n$.

3. Нехай $\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^2 \;:\; |x| < 1/2 \,\}$, $0 < s < 1/2$ і

$$v(x) = |\lg|x|\,|^s\,.$$

Перевірити, що $v(x) \in W^{1,2}(\Omega)$, $v(x) \in L^p(\Omega)$ при $1 \le p < \infty$ але $v(x) \notin \widetilde{L}^\infty(\Omega)$.)

Для фіксованого цілого $m \ge 1$ визначимо на лінійному просторі $C^\infty(\overline{\Omega})$ норми

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^n} + \ldots + \|\nabla^m u\|^p_{L^p(\Omega)^{n^m}} \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max\big\{\, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n}, \ldots, \|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)^{n^m}} \big\} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

B4.17. Поповнення нормованого простору $(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty$$

і називається простором *Соболєва m-го порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω.

Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty.$$

Таким чином, $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{m,p}(\Omega)$.

Теорема 4.18. *Розглянемо m-градієнт ∇^m як оператор із $(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ в $(L^p(\Omega)^{n^m}, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^{n^m}})$ при $1 \le p \le \infty$. Тоді $\nabla^m \in B(C^\infty(\overline{\Omega}), L^p(\Omega)^{n^m})$ і*

$\exists\, 1 \quad \overline{\nabla^m} \in B(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{n^m})$:

$$\overline{\nabla^m}(v) = \nabla^m(v) \qquad \forall\, v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \qquad i \qquad \|\,\overline{\nabla^m}\,\|_{B(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{n^m})} = 1.$$

$\triangleleft$ Нехай $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Тоді $\nabla^m u \in C^\infty(\overline{\Omega})^{n^m} \subset L^p(\Omega)^{n^m}$ і

$$\|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)^{n^m}} \le \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \ldots + \|\nabla^m u\|^p_{L^p(\Omega)^{n^m}} \Big)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \ \text{ при } \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|\nabla^m u\|_{L^\infty(\Omega)^{n^m}} \le \max\big\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \ldots, \|\nabla^m u\|_{L^\infty(\Omega)^{n^m}} \big\} = \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. $\triangleright$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що

$$\overline{\nabla^m}(v) = \overline{\nabla}^m(v) \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 \le p \le \infty. \quad)$$

Відомо, що $W^{m,p}(\Omega) = \{\, u \in L^p(\Omega) \,:\, \overline{\nabla} u \in L^p(\Omega)^n, \ldots, \overline{\nabla}^m u \in L^p(\Omega)^{n^m} \}$ при $1 \le p < \infty$. Визначимо

$$\widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega) = \{\, u \in \tilde{L}^\infty(\Omega) \,:\, \overline{\nabla} u \in \tilde{L}^\infty(\Omega)^n, \ldots, \overline{\nabla}^m u \in \tilde{L}^\infty(\Omega)^{n^m} \},$$

і $\widetilde{W}_0^{m,\infty}(\Omega) = \widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega) \cap W_0^{m,1}(\Omega)$. Тоді $W^{m,\infty}(\Omega) \subset \widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega)$.

При $p = 2$ простір $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u, v)_{W^{m,p}(\Omega)} = \int_\Omega u\,\overline{v}\,d\,x + \int_\Omega (\nabla u, \nabla \overline{v})\,d\,x \,+ \ldots + \int_\Omega (\nabla^m u, \nabla^m \overline{v})\,d\,x,$$

де зазвичай пишуть ∇ замість $\overline{\nabla}$. Такі гільбертові простори позначаються також

$$(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}) = (W^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)})$$

і $(H_0^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}) = (W_0^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)})$.

5. Ряди Фур'є.

Лінійний простір H над $\mathbf{C}$ (або $\mathbf{R}$) із деяким скалярним добутком $\varphi(\cdot,\cdot)$ називається *передгільбертовим простором* (H,φ). Скалярний добуток є спряжено-білінійним функціоналом $\varphi : H\times H\to\mathbf{C}$ таким, що $\forall\, a,b\in H$ цей функціонал задовольняє умовам

$$i)\qquad \varphi(a,b)=\overline{\varphi(b,a)}\,;\qquad ii)\qquad \varphi(a,a)\geq 0\,;$$

$$iii)\quad \varphi(a,a)=0\quad\Leftrightarrow\quad a=\theta\,.$$

Передгільбертовий простір (H,φ) є нормованим простором $(H,\|\cdot\|_H)$, де

$$\|a\|_H=\sqrt{\varphi(a,a)}\qquad \forall\, a\in H.$$

Повний передгільбертовий простір (H,φ) називається *гільбертовим простором.*

Зазвичай позначають $\varphi(a,b)=\langle a,b\rangle_H$, $\varphi(a,b)=(a,b)_H$ або $\varphi(a,b)=(a,b)$.

Нормований простір $(L,\|\cdot\|_L)$ називається *сепарабельним*, якщо існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}\subset L$ (тобто $\{w_i\}_{i=1}^{m}$ лінійно незалежні для $m\in\mathbf{N}$) такі, що лінійний простір

$$\widetilde{L}=\{\, v\in L\,:\, v=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i\,,\quad \alpha_i\in\mathbf{C},\quad m\in\mathbf{N}\,\}$$

є щільним в L. Тобто $\forall\, v\in L$, $\forall\,\varepsilon>0$ знайдуться $m\in\mathbf{N}$ і $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ такі, що

$$\left\| v-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i\right\|_L<\varepsilon\,.$$

Якщо $\{w_i\}_{i=1}^{m}$ лінійно незалежні, тоді

$$\overline{\{w_i\}_{i=1}^{m}}=\mathrm{Lin}\{\, w_1,\ldots,w_m\,\}=\{\,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i\,,\quad \alpha_i\in\mathbf{C}\,\}$$

називається *лінійною оболонкою* елементів $\{w_i\}_{i=1}^{m}$. Таким чином, $\widetilde{L}=\cup_m\overline{\{w_i\}_{i=1}^{m}}$.

Система елементів $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}\subset H$ передгільбертового простору $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\langle e_i,e_j\rangle=0\quad\text{для}\quad i\neq j\qquad\text{і}\qquad \|\, e_i\|=1\quad\text{для}\quad i,j=1,2,\ldots\,.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що ортонормована система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ є лінійно незалежною.)

Теорема 5.1 (Шмідт). *Нехай система елементів* $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ *передгільбертового простору* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *над* $\mathbf{C}$ *є лінійно незалежною.*

Тоді існує ортонормована система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ *така, що*

$$e_m \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^{m}} = \mathrm{Lin}\{\, w_1, \ldots, w_m \,\}$$

для кожного $m = 1, 2, \ldots$, *тобто* $\overline{\{e_j\}_{j=1}^{m}} = \overline{\{w_i\}_{i=1}^{m}}$ *для кожного* $m = 1, 2, \ldots$.

$\triangleleft$ Визначимо $e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, де $\|w_1\| \neq 0$, оскільки система $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ є лінійно незалежною. Нехай

$$g_2 = w_2 - \alpha_{21} e_1 \,.$$

Виберемо $\alpha_{21} \in \mathbf{C}$ так, щоб

$$\langle g_2, e_1 \rangle = 0 \,.$$

Тоді $\alpha_{21} = \langle w_2, e_1 \rangle$ визначено однозначно. Визначимо $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^{2}}$, де $\|g_2\| \neq 0$, оскільки, якщо $g_2 = \theta$, тоді w_1, w_2 лінійно залежні.

Далі використовується індукція. Нехай $e_1, \ldots, e_{k-1}$ вже вибрані. Розглянемо

$$g_k = w_k - \alpha_{k1} e_1 - \alpha_{k2} e_2 - \ldots - \alpha_{k,k-1} e_{k-1}$$

і виберемо $\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{k,k-1} \in \mathbf{C}$ так, щоб

$$\langle g_k, e_1 \rangle = 0 \,, \quad \langle g_k, e_2 \rangle = 0 \,, \quad \ldots \quad , \quad \langle g_k, e_{k-1} \rangle = 0 \,.$$

Тоді $\alpha_{k1} = \langle w_k, e_1 \rangle, \ldots, \alpha_{k,k-1} = \langle w_k, e_{k-1} \rangle$ визначені однозначно. Таким чином, $e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|} \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^{k}}$, де $g_k \neq \theta$, оскільки $w_1, w_2, \ldots, w_k$ лінійно незалежні. $\triangleright$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що система $\{e^{nx2\pi\sqrt{-1}} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \subset L^2(0,1)$ є ортонормованою.)

B5.2. Нехай система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ є ортонормованою і $h \in H$. Тоді числа

$$\phi_k = \langle h, e_k \rangle$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є* елементу $h \in H$ по системі $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \, e_k \,, \quad \text{де} \qquad \phi_k = \langle h, e_k \rangle,$$

називається *рядом Фур'є* елементу $h \in H$ по системі $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 5.3. *Нехай система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ є ортонормованою і $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ є коефіцієнтами Фур'є елементу $h \in H$. Тоді ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2$ є збіжним і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \leq \|h\|_H^2. \tag{5.1}$$

$\triangleleft$ Для $m \in \mathbf{N}$ безпосередньо перевіряється, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{m} \phi_k \, e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |\phi_k|^2 \tag{5.2}$$

і тому

$$\sum_{k=1}^{m} |\phi_k|^2 \leq \|h\|_H^2. \qquad \triangleright$$

Нерівність (5.1) називається *нерівністю Бесселя.*

Із рівності (5.2) для кожного $m \in \mathbf{N}$ відразу випливає, що

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_k \, e_k \to h \quad \text{при} \quad m \to \infty \qquad (\text{тобто} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \, e_k \,)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|h\|_H^2. \tag{5.3}$$

Ця рівність називається *рівністю Парсеваля-Стєклова.* Якщо рівність (5.3) виконується для кожного $h \in H$, тоді ортонормована система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називається *замкнутою в сенсі Стєклова.*

Теорема 5.4 (про мінімальність коефіцієнтів Фур'є) *Нехай система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ є ортонормованою і $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є коефіцієнтами Фур'є елементу $h \in H$. Тоді для кожного $m \in \mathbf{N}$ маємо*

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \left\| h - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, e_k \right\|_H^2 = \left\| h - \sum_{k=1}^{m} \phi_k \, e_k \right\|_H^2.$$

$\triangleleft$ Для $m \in \mathbf{N}$ безпосередньо перевіряється, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |\phi_k|^2 + \sum_{k=1}^{m} |\phi_k - \alpha_k|^2$$

і тому мінімум правої частини досягається при $\alpha_k = \phi_k$ для $k = 1, \ldots, m$. $\triangleright$

Теорема 5.5. *Нехай система елементів* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *передгільбертового простору* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *є ортонормованою і щільною в* H. *Тоді для кожного* $h \in H$ *маємо*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\, e_k\,.$$

$\triangleleft$ Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ є щільною в H. Тобто $\forall\, h \in H$, $\forall \varepsilon > 0$ знайдуться $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ і $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_\varepsilon}$ такі, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k \right\|_H^2 < \varepsilon\,.$$

Звідки та із мінімальності коефіцієнтів Фур'є $\phi_k = \langle h, e_k\rangle$ випливає, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \phi_k e_k \right\|_H^2 < \varepsilon\,.$$

Крім того, для $m \geq N_\varepsilon$ із рівності (5.2) маємо

$$0 \leq \left\| h - \sum_{k=1}^{m} \phi_k\, e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |\phi_k|^2 - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{m} |\phi_k|^2 < \varepsilon - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{m} |\phi_k|^2 < \varepsilon\,.$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_k\, e_k \to h \quad \text{при} \quad m \to \infty \qquad (\,\text{тобто} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\, e_k\,) \qquad \triangleright$$

Теорема 5.6 (Фур'є). *Нехай* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ *така, що ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ *збігається. Тоді для кожної ортонормованої системи* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *гільбертового простору* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ *збігається і є рядом Фур'є деякого* $h \in H$, *тобто*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k\,, \quad \text{де} \qquad \alpha_k = \langle h, e_k\rangle.$$

$\triangleleft$ Для $m, p \in \mathbf{N}$ із рівності

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} \alpha_k\, e_k \right\|_H^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p} |\alpha_k|^2$$

випливає, що послідовність $s_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, e_k$ є фундаментальною. Простір H є повним і тому $\exists\, 1\, h \in H\ :\quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$.

Крім того, для $k \in \mathbf{N}$ із неперервності скалярного добутку випливає, що

$$\langle h, e_k\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle s_m, e_k\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, e_i, e_k\,\rangle = \alpha_k. \qquad \triangleright$$

Теорема 5.7 (про щільність у гільбертовому просторі). *Нехай H є гільбертовим простором. Тоді ортонормована система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ щільна в H*

$$\Leftrightarrow \quad h \in H \,:\, \langle h, e_k \rangle = 0 \quad \forall\, k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad h = \theta\,.$$

$\triangleleft\,(\Rightarrow)$ Нехай система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ щільна в H, тоді $\forall\, h \in H$ виконана рівність Парсеваля-Стєклова (5.3) і тому $\langle h, e_k \rangle = 0 \quad \forall\, k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \|h\|_H = 0\,.$ $(\Rightarrow)\triangleright$

$\triangleleft\,(\Leftarrow)$ Нехай $h \in H$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\, e_k\,, \quad \textit{де} \qquad \phi_k = \langle h, e_k \rangle,$$

є рядом Фур'є для h. Із нерівності Бесселя (5.1) випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2$ збігається. Тоді із теореми 5.6 отримуємо, що $\exists\, 1\, h_0 \in H$:

$$h_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\, e_k\,, \quad \textit{де} \qquad \phi_k = \langle h_0, e_k \rangle.$$

Таким чином, $\langle h - h_0, e_k \rangle = 0 \quad \forall\, k \in \mathbf{N}$ і тому $h = h_0$, тобто кожен $h \in H$ може бути наближений лінійною комбінацією

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_k\, e_k$$

елементів системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Це означає, що $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ щільна в H. $(\Leftarrow)\triangleright$

B5.8. Система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору L називається *базисом*, якщо для кожного $l \in L$ знайдуться $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$:

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k\,.$$

Теорема 5.9. *У кожному сепарабельному передгільбертовому просторі H існує ортонормований базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$.*

$\triangleleft$ Ця теорема випливає із визначень та теорем 5.1 і 5.5. $\triangleright$

Теорема 5.10(про еквівалентність). *Кожен сепарабельний гільбертовий простір H над $\mathbf{C}$ (відповідно над $\mathbf{R}$) є еквівалентним гільбертовому простору*

$$l^2(\mathbf{C}) \;=\; \{\, \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\,\alpha_k|^2 < \infty, \quad \alpha_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \ldots, n, \ldots\}$$

(*відповідно* $l^2(\mathbf{R})$).

$\lhd$ В H існує ортонормований базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ згідно з теоремою 5.9. Визначимо відображення $\varphi : H \to l^2(\mathbf{C})$ співвідношенням

$$h \mapsto \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \textit{де} \qquad \phi_k = \langle h, e_k \rangle.$$

Із теореми 5.3 випливає, що це відображення визначене (тобто $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbf{C})$), а із теореми 5.6 випливає, що відображення φ є лінійним і взаємно однозначним.

Крім того, якщо $h \mapsto \varphi(h) = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $l \mapsto \varphi(l) = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, то із неперервності скалярного добутку випливає, що

$$\langle h, l \rangle_H = \lim_{m\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{m} \phi_k\, e_k, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, e_i \rangle_H = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \phi_k \overline{\alpha}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \overline{\alpha}_k = \langle \varphi(h), \varphi(l) \rangle_{l^2},$$

$$\|h\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\varphi(h)\|_{l^2}^2, \qquad \|l\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|\varphi(l)\|_{l^2}^2,$$

тобто відображення φ зберігає скалярний добуток і норми. $\rhd$

Із теореми 5.10 безпосередньо випливає наступне твердження.

Теорема 5.11 (про еквівалентність гільбертових просторів). *Сепарабельні гільбертові простори* H_1 і H_2 *над* $\mathbf{C}$ (*відповідно над* $\mathbf{R}$) *є еквівалентними.* $\lhd$ $\rhd$

Із наведених теорем безпосередньо випливає також наступне твердження.

Теорема 5.12 (про поповнення передгільбертових просторів). *Нехай визначена ортонормована система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *у сепарабельному передгільбертовому просторі* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$. *Тоді поповнення цього простору* $(\overline{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ *визначається рівністю*

$$\overline{H} = \{\, h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\, e_k \; : \quad \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbf{C}) \,\}$$

та

$$\langle h, l \rangle_H = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \overline{\alpha}_k \qquad \textit{для} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k \quad \textit{і} \quad l = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k. \qquad \lhd \; \rhd$$

Наприклад, при $i = \sqrt{-1}$ система $\{e^{x\,m\,2\pi\,i} \,:\, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset C^0[0,1]$ є ортонормованою (щодо $L^2(0,1)$-добутку) у сепарабельному просторі $C^0[0,1]$ та

$$\overline{C^0[0,1]} = L^2(0,1) = \{\, h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m\, e^{x\,m\,2\pi\,i} \; : \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2 < \infty \,\},$$

$$\langle h, l \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 h(x)\, \overline{l(x)}\, dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m \overline{\alpha}_m\,, \qquad \|h\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2$$

для $h = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m e^{x\,m\,2\pi\,i}$ і $l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{x\,m\,2\pi\,i}$ (де $e^{\varrho\, i} = \cos\varrho + i \sin\varrho$, $\varrho \in [0, 2\pi]$).

Аналогічно, ця система $\{e^{x\,m\,2\pi\,i}\ :\ m=0,\pm1,\pm2,\dots\}\subset C^\infty[0,1]$ є ортонормованою в $C^\infty[0,1]$ (щодо $L^2(0,1)$-добутку) і тому

$$\overline{C^\infty[0,1]}=L^2(0,1)=\{\,h(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\phi_m\,e^{x\,m\,2\pi\,i}\ :\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}|\phi_m|^2<\infty\,\}\,.$$

Більш того, сепарабельний простір *тригонометричних поліномів*

$$\mathrm{Trig}\,[0,1]=\{\,h\in C^\infty[0,1]\ :\ h(x)=\sum_{m=-M}^{M}\phi_m\,e^{x\,m\,2\pi\,i},\quad \phi_m\in\mathbf{C},\quad M\in\mathbf{N}\,\}$$

є щільним в $L^2(0,1)$ (оскільки $\overline{C^0[0,1]}=L^2(0,1)$). Таким чином, отримуємо

$$\overline{\mathrm{Trig}\,[0,1]}=L^2(0,1)=\{\,h(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\phi_m\,e^{x\,m\,2\pi\,i}\ :\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}|\phi_m|^2<\infty\,\}.$$

Для $x\in\mathbf{R}^n$ і $m\in\mathbf{Z}^n$ визначимо

$$e^{(x,\,m)\,2\pi\,i}=\ e^{(x_1\,m_1+\ldots+x_n\,m_n)\,2\pi\,i}=\ e^{x_1\,m_1\,2\pi\,i}\cdot\ldots\cdot\ e^{x_n\,m_n\,2\pi\,i},$$

$$\mathrm{Trig}\,[0,1]^n=\{\,h\in C^\infty[0,1]^n\ :\ h(x)=\sum_{m\in Z^n\,:\,|m|\le M}\phi_m\,e^{(x,\,m)\,2\pi\,i},\ \ \phi_m\in\mathbf{C},\ \ M\in\mathbf{N}\,\}\,.$$

Безпосередньо перевіряється, що система $\{e^{(x,\,m)\,2\pi\,i}\ :\ m\in\mathbf{Z}^n\}\subset\mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ є ортонормованою в $\mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ (щодо $L^2((0,1)^n)$-добутку) і тому

$$\overline{\mathrm{Trig}\,[0,1]^n}=L^2((0,1)^n)=\{\,h(x)=\sum_{m\in Z^n}\phi_m\,e^{(x,\,m)\,2\pi\,i}\ :\quad \sum_{m\in Z^n}|\phi_m|^2<\infty\,\}\,,$$

$$\langle h,l\rangle_{L^2((0,1)^n)}=\int_{(0,1)^n}h(x)\,\overline{l(x)}\,dx=\sum_{m\in Z^n}\phi_m\overline{\alpha}_m\,,\qquad \|h\|^2_{L^2((0,1)^n)}=\sum_{m\in Z^n}|\phi_m|^2$$

для $h=\sum_{m\in Z^n}\phi_m e^{(x,\,m)\,2\pi\,i}$ і $l=\sum_{m\in Z^n}\alpha_m e^{(x,\,m)\,2\pi\,i}$, де $\phi_m=\int_{(0,1)^n}h(x)\,e^{-(x,\,m)\,2\pi\,i}\,dx$.

Для кожного $k=1,\dots,n$ функція $h(x)\in\mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ задовольняє умовам

$$h(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)=h(x_1,\dots,x_k+1,\dots,x_n)\,,$$

які називаються умовами 1-*періодичності* та можуть бути записані у вигляді $h(x)=h(x+m)\ \forall\,x\in\mathbf{R}^n,\ \forall\,m\in\mathbf{Z}^n$. Крім того, для кожного $l=1,\dots$ і $k=1,\dots,n$ функція $h(x)\in\mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ задовольняє також умовам

$$\left.\frac{\partial^l h(x)}{\partial^l x_k}\right|_{x_k=0}=\left.\frac{\partial^l h(x)}{\partial^l x_k}\right|_{x_k=1},$$

які називаються умовами 1-*періодичності для нормальних похідних.*

Розглянемо лінійний простір $\mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ над $\mathbf{C}$ як передгільбертовий із скалярним добутком

$$(u,v)_{H^1((0,1)^n)} = \int\limits_{(0,1)^n} u(x)\,\overline{v(x)}\,d\,x + \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)})\,d\,x\,.$$

Для $u(x) = \sum_{\{m\in Z^n:\,|m|\le M\}} \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi\,i} \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ маємо

$$\|u\|^2_{H^1((0,1)^n)} = (u,u)_{H^1((0,1)^n)} = \sum_{\{m\in Z^n:\,|m|\le M\}} (1+|2\pi m|^2)|\alpha_m|^2\,,$$

оскільки

$$\nabla u(x) = \sum_{\{m\in Z^n:\,|m|\le M\}} (2\pi m\,i)\,\alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi\,i}.$$

B5.13. Поповнення нормованого простору $(\mathrm{Trig}[0,1]^n, \|\cdot\|_{H^1((0,1)^n)})$ позначається

$$(H^1_{per}((0,1)^n), \|\cdot\|_{H^1((0,1)^n)})$$

і називається простором *Соболєва першого порядку* інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0,1)^n$.

За визначенням $H^1_{per}((0,1)^n) \subset H^1((0,1)^n)$, але $H^1_{per}((0,1)^n) \ne H^1((0,1)^n)$, оскільки функції із $H^1_{per}((0,1)^n)$ зберігають в певному сенсі умови 1-періодичності. Безпосередньо перевіряється також, що

$$H^1_{per}((0,1)^n) = \{\, u(x) = \sum_{m\in Z^n} \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi\,i} \;:\quad \sum_{m\in Z^n} (1+|2\pi m|^2)|\alpha_m|^2 < \infty \,\}\,.$$

Для $s \in \mathbf{R}$ та $u(x) = \sum_{\{m\in Z^n:\,|m|\le M\}} \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi\,i} \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ визначені також норми

$$\|u\|^2_{H^s((0,1)^n)} = \sum_{m\in Z^n} (1+|2\pi m|^2)^s|\alpha_m|^2\,.$$

B5.14. Поповнення нормованого простору $(\mathrm{Trig}\,[0,1]^n, \|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)})$ позначається

$$(H^s_{per}((0,1)^n), \|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)})$$

і називається простором *Соболєва s-го порядку* інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0,1)^n$.

Таким чином, для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ за визначенням

$$H^s_{per}((0,1)^n) = \{\, u(x) = \sum_{m\in Z^n} \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi\,i} \;:\quad \sum_{m\in Z^n} (1+|2\pi m|^2)^s|\alpha_m|^2 < \infty \,\}$$

є сепарабельним гільбертовим простором функцій вигляду $u(x)=\sum_{m\in Z^n}\alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i}$ (де ряд збігається у нормі $\|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)}$ і коефіцієнти $\alpha_m\in\mathbf{C}$ для $m\in Z^n$ такі, що $\sum_{m\in Z^n}(1+|2\pi m|^2)^s|\alpha_m|^2<\infty$) із скалярним добутком

$$\langle h,l\rangle_{H^s_{per}((0,1)^n)}=\sum_{m\in Z^n}(1+|2\pi m|^2)^s\alpha_m\overline{\beta}_m$$

для $h(x)=\sum_{m\in Z^n}\alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i}$ і $l(x)=\sum_{m\in Z^n}\beta_m e^{(x,m)\,2\pi i}$. Зокрема, маємо

$$H^0_{per}((0,1)^n)=L^2((0,1)^n)\qquad\text{і}\qquad H^s_{per}((0,1)^n)\subset H^{s'}_{per}((0,1)^n)\qquad\text{при}\qquad s>s'.$$

Для $s\neq 0$ система $\{\,e^{(x,m)\,2\pi i},\, m\in\mathbf{Z}^n\,\}$ неортонормована в $H^s_{per}((0,1)^n)$, але

$$e_m(x)=(1+|2\pi m|^2)^{-s/2}\,e^{(x,m)\,2\pi i}\qquad\text{для}\qquad m\in\mathbf{Z}^n$$

є ортонормованою системою в $H^s_{per}((0,1)^n)$, оскільки $\langle e_m,e_m\rangle_{H^s_{per}((0,1)^n)}=1$. Ряд Фур'є функції $u(x)=\sum_{m\in Z^n}\alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i}\in H^s_{per}((0,1)^n)$ за цією системою має вигляд

$$u(x)=\sum_{m\in Z^n}\phi_m e_m=\sum_{m\in Z^n}\phi_m(1+|2\pi m|^2)^{-s/2}e^{(x,m)\,2\pi i}$$

де

$$\phi_m=\langle u,e_m\rangle_{H^s_{per}((0,1)^n)}=(1+|2\pi m|^2)^{s/2}\,\alpha_m\qquad\text{для}\qquad m\in\mathbf{Z}^n$$

є коефіцієнтами Фур'є, які належать $l^2(\mathbf{Z}^n,\mathbf{C})$ відповідно до теореми 5.10.

Таким чином, для кожного $s\in\mathbf{R}$ система $\{\,e^{(x,m)\,2\pi i},\, m\in\mathbf{Z}^n\,\}$ є базисом у просторі Соболєва $H^s_{per}((0,1)^n)$ із коефіцієнтами розкладання $\{\alpha_m\}_{m\in Z^n}$ для $u=\sum_{m\in Z^n}\alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i}$, яки визначаються через коефіцієнти Фур'є $\{\phi_m\}_{m\in Z^n}$ рівностями

$$\alpha_m=(1+|2\pi m|^2)^{-s/2}\,\phi_m\qquad\text{та}\qquad \alpha_m=\langle u,e^{(x,m)\,2\pi i}\rangle_{L^2((0,1)^n)}\qquad\text{для}\qquad m\in\mathbf{Z}^n.$$

Для $h=\sum_{m\in Z^n}\phi_m e^{(x,m)\,2\pi i}$, $l=\sum_{m\in Z^n}\alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i}\in L^2((0,1)^n)$ скалярний добуток визначається формулою

$$\langle h,l\rangle_{L^2((0,1)^n)}=\int\limits_{(0,1)^n}h(x)\,\overline{l(x)}\,dx=\sum_{m\in Z^n}\phi_m\overline{\alpha}_m.$$

Для фіксованого $s\in\mathbf{R}$ із нерівності Коші-Буняковського-Шварца випливає, що

$$\begin{aligned}\left|\langle h,l\rangle_{L^2((0,1)^n)}\right|&=\left|\sum_{m\in Z^n}(1+|2\pi m|^2)^{-s/2}\phi_m\,(1+|2\pi m|^2)^{s/2}\overline{\alpha}_m\right|\leq\\&\leq\|h\|_{H^{-s}_{per}((0,1)^n)}\|l\|_{H^s_{per}((0,1)^n)},\end{aligned}\tag{5.4}$$

тому вираз $\langle h, l\rangle_{L^2((0,1)^n)}$ є визначеним і коли $h \in H^{-s}_{per}((0,1)^n)$ та $l \in H^{s}_{per}((0,1)^n)$. Такий вираз називається *дуальністю* між $H^{-s}_{per}((0,1)^n)$ і $H^{s}_{per}((0,1)^n)$ та позначається

$$\langle h, l\rangle_s = \langle h, l\rangle_{H^{-s}_{per}((0,1)^n), H^{s}_{per}((0,1)^n)}.$$

Таким чином, для $h = \sum\limits_{m\in Z^n} \alpha_m e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^{-s}_{per}((0,1)^n)$ при $s \in \mathbf{R}$ є визначеним "узагальнений" інтеграл

$$\int\limits_{(0,1)^n} h(x)\,dx = \langle h, 1\rangle_s = \alpha_0,$$

який співпадає із "звичайним" інтегралом при $s = 0$ та задовольняє нерівності

$$\left| \int\limits_{(0,1)^n} h(x)\,dx \right| \le \|h\|_{H^{-s}_{per}((0,1)^n)}.$$

Зокрема, із цієї нерівності випливає, що можна визначити "узагальнений" інтеграл також як продовження по неперервності оператора "звичайного" інтегрування, що розглядається як обмежений оператор із $(\mathrm{Trig}[0,1]^n, \|\cdot\|_{H^{-s}_{per}((0,1)^n)})$ в $\mathbf{C}$.

Крім того, із нерівності (5.4) і теореми Рісса випливає, що простори $H^{-s}_{per}((0,1)^n)$ та $H^{s}_{per}((0,1)^n)$ є взаємно спряженими, тобто

$$H^{-s}_{per}((0,1)^n)^* = H^{s}_{per}((0,1)^n) \qquad \text{та} \qquad H^{s}_{per}((0,1)^n)^* = H^{-s}_{per}((0,1)^n).$$

Втім, кожен сепарабельний гільбертовий простір можна ототожнити із $l^2(\mathbf{C})$, але корисно розглядати і функції із $H^{s}_{per}((0,1)^n)$, оскільки показник s є показником *регулярності* функцій, що буде пояснено надалі прикладами.

Для кожного $s \in \mathbf{R}$ із теореми 3.15 випливає, що

$$H^{s}_{per}((0,1)^n) = \mathbf{C} \oplus H^{s}_{pe*}((0,1)^n),$$

де

$$H^{s}_{pe*}((0,1)^n) = \mathbf{C}^{\perp} = \{\, v \in H^{s}_{per}((0,1)^n) \ :\ \langle v, l\rangle_{H^{s}_{per}((0,1)^n)} = 0 \quad \forall\, l \in \mathbf{C} \,\} =$$

$$= \{\, v(x) = \sum_{m\in Z^n} \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^{s}_{per}((0,1)^n) \ :\ \alpha_0 = 0 \,\}.$$

Для $Z^n_* = Z^n \setminus \{0\}$, фіксованого $s \in \mathbf{R}$ і $u(x) = \sum_{m \in Z^n_*} \alpha_m \, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ визначені норми

$$\|u\|^2_{H^s_{per}((0,1)^n)} = \sum_{m \in Z^n_*} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2$$

і

$$\|u\|^2_{*s} = \|u\|^2_{H^s_{pe*}((0,1)^n)} = \sum_{m \in Z^n_*} |m|^{2s} |\alpha_m|^2.$$

Теорема 5.15 (про еквівалентність Пуанкаре норм Соболєва для 1-періодичних функцій). *Для фіксованого* $s \in \mathbf{R}$ *на просторі* $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ *норми* $\| \cdot \|_{*s}$ *і* $\| \cdot \|_{H^s_{per}((0,1)^n)}$ *є еквівалентними, тобто знайдуться постійні* $\alpha, \beta > 0$ *такі, що*

$$\alpha \, \|u\|_{*s} \leq \|u\|_{H^s_{per}((0,1)^n)} \leq \beta \, \|u\|_{*s} \tag{5.5}$$

для кожного $u \in H^s_{per}((0,1)^n)$.

$\triangleleft$ Наприклад, для $s > 0$ і кожного $m \in \mathbf{Z}^n_*$ маємо нерівності

$$|m|^{2s} \leq (1 + |2\pi m|^2)^s \leq (1 + 4\pi^2)^s |m|^{2s}.$$

Тому для $u = \sum_{m \in Z^n_*} \alpha_m \, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ отримуємо

$$\|u\|^2_{*s} = \sum_{m \in Z^n_*} |m|^{2s} |\alpha_m|^2 \leq \sum_{m \in Z^n_*} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 \leq (1 + 4\pi^2)^s \sum_{m \in Z^n_*} |m|^{2s} |\alpha_m|^2,$$

де ряди є збіжними, оскільки за визначенням

$$H^s_{pe*}((0,1)^n) = \{ \, u = \sum_{m \in Z^n_*} \alpha_m \, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \; : \quad \sum_{m \in Z^n_*} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 < \infty \, \}.$$

Аналогічно розглядається випадок $s \leq 0$. $\triangleright$

При $s = 1$ нерівність (5.5) називається *нерівністю Пуанкаре.*

Таким чином, для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ можна вважати, що

$$H^s_{pe*}((0,1)^n) = \{ \, u = \sum_{m \in Z^n_*} \alpha_m \, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \; : \quad \sum_{m \in Z^n_*} |m|^{2s} |\alpha_m|^2 < \infty \, \}$$

є сепарабельним гільбертовим простором із скалярним добутком

$$\langle h, l \rangle_{H^s_{per}((0,1)^n)} = \sum_{m \in Z^n_*} |m|^{2s} \alpha_m \overline{\beta}_m$$

для $h(x) = \sum_{m \in Z^n_*} \alpha_m e^{(x,m)\,2\pi\, i}$ і $l(x) = \sum_{m \in Z^n_*} \beta_m e^{(x,m)\,2\pi\, i}$.

Приклад 5.16. Нехай $n = 1$ і $u = \chi_{[1/4,3/4]}(x)$ є характеристичною функцією відрізка $[1/4, 3/4] \subset [0, 1]$. Обчислимо коефіцієнти розвинення цієї функції у ряд $u = \alpha_0 + \sum_{m \in Z_*} \alpha_m e^{x\,m\,2\pi\,i}$. За визначенням $\alpha_0 = 1/2$ і при $m \neq 0$ маємо

$$\alpha_m = \langle u, e^{2\pi\,i\,m\,x} \rangle_{L^2(0,1)} = \int\limits_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi\,i\,m\,x}\,dx = \frac{-1}{2\pi\,i\,m}\,e^{-2\pi\,i\,m\,x}\Big|_{1/4}^{3/4}.$$

Тому $\alpha_m = 0$ при $m = 2l$, $\alpha_m = -(2\pi\,m)^{-1}$ при $m = 4l + 1$ і $\alpha_m = (2\pi\,m)^{-1}$ при $m = 4l + 3$ для $l \in \mathbf{Z}_*$. Таким чином,

$$u = \frac{1}{2} - \sum_{m \in Z_*:\; m=1\;mod\,4} (2\pi\,m)^{-1}\,e^{x\,m\,2\pi\,i} + \sum_{m \in Z_*:\; m=3\;mod\,4} (2\pi\,m)^{-1}\,e^{x\,m\,2\pi\,i}$$

і

$$u \in H^s_{per}(0,1) \qquad \text{при} \qquad s < \frac{1}{2},$$

оскільки

$$\sum_{m \in Z_*:\; m=1\;mod\,2} \frac{|m|^{2s}}{|2\pi m|^2} = \sum_{m \in Z_*:\; m=1\;mod\,2} \frac{(2\pi)^{-2}}{|m|^{2-2s}} < \infty \qquad \text{лише при} \qquad s < \frac{1}{2}.$$

Теорема 5.17 (Соболєва про вкладення для 1-періодичних функцій $(n = 1)$). *Нехай* $n = 1$ *і* $u \in H^s_{per}(0,1)$ *при* $\frac{1}{2} < s$. *Тоді*

$$u \in C^0[0,1],$$

тобто $H^s_{per}(0,1) \subset C^0[0,1]$ *у сенсі, що існує постійна* C *така, що для кожного* $u \in H^s_{per}(0,1)$ *існує (єдиний) представник* $\tilde{u}$ *класу* u *такий, що*

$$\|\tilde{u}\|_{C^0[0,1]} \leq C\,\|u\|_{H^s_{per}(0,1)} \qquad (\textit{неперервність вкладення}).$$

$\triangleleft$ Можна вважати, що $u = \sum \alpha_m\,e^{x\,m\,2\pi\,i} \in H^s_{pe*}(0,1)$ при $\frac{1}{2} < s$. Тоді

$$|u|^2 = \left|\sum \alpha_m\,|m|^s\,|m|^{-s}\,e^{x\,m\,2\pi\,i}\right|^2 \leq \left|\sum \alpha_m^2\,|m|^{2s}\right|\,\left|\sum |m|^{-2s}\right| = c\,\|u\|^2_{*s},$$

оскільки $c = \sum |m|^{-2s} < \infty$ при $\frac{1}{2} < s$. Таким чином, отримуємо

$$\|u\|_{C^0[0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq C\,\|u\|_{H^s_{per}(0,1)}$$

принаймні, якщо $u \in \mathrm{Trig}\,[0,1]$. Із цієї нерівності випливає, що послідовність

$$s_k = \sum_{m \in Z_0\,:\;|m| \leq k} \alpha_m\,e^{x\,m\,2\pi\,i}$$

є фундаментальною в $C^0[0,1]$, оскільки ця послідовність є фундаментальною в $H^s_{per}(0,1)$. Тому існує єдине $\tilde{u} \in C^0[0,1]$ таке, що $\|\tilde{u} - s_k\|_{C^0[0,1]} \to 0$, оскільки $(C^0[0,1], \|\cdot\|_{C^0[0,1]})$ є повним. Крім того, неперервна функція $\tilde{u} \in C^0[0,1]$ є представником класу $u \in H^s_{pe*}(0,1)$, оскільки цей клас однозначно визначається коефіцієнтами $\{\alpha_m\}_{m\in Z_*}$ у відповідності із теоремою 5.6. $\triangleright$

Приклад 5.18. Нехай $n = 2$ і $u = \chi_{[1/4,3/4]^2}(x_1, x_2)$ є характеристичною функцією квадрату $[1/4, 3/4]^2 \subset [0,1]^2$. Обчислимо коефіцієнти розвинення цієї функції у ряд $u = \alpha_0 + \sum_{m\in Z^2_*} \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi i}$. За визначенням $\alpha_0 = 1/4$ і

$$\alpha_{(m_1,0)} = \langle u, e^{2\pi i\, m_1 x_1}\rangle_{L^2(0,1)^2} = \frac{1}{2}\int_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i\, m_1 x_1}\, dx_1 = \frac{-1}{4\pi i\, m_1}\, e^{-2\pi i\, m_1 x_1}\Big|_{1/4}^{3/4},$$

$$\alpha_{(0,m_2)} = \langle u, e^{2\pi i\, m_2 x_2}\rangle_{L^2(0,1)^2} = \frac{1}{2}\int_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i\, m_2 x_2}\, dx_2 = \frac{-1}{4\pi i\, m_2}\, e^{-2\pi i\, m_2 x_2}\Big|_{1/4}^{3/4},$$

$$\alpha_{(m_1,m_2)} = 4\,\alpha_{(m_1,0)}\alpha_{(0,m_2)} = \frac{1}{4\pi\, m_1\, \pi\, m_2}\, e^{-2\pi i\, m_1 x_1}\Big|_{1/4}^{3/4}\, e^{-2\pi i\, m_2 x_2}\Big|_{1/4}^{3/4}$$

при $m_1 \neq 0$ і $m_2 \neq 0$. Таким чином, як в прикладі 5.16, отримуємо

$$u \in H^s_{per}((0,1)^2) \qquad \text{при} \qquad s < \frac{1}{2}\,.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Нехай $\varepsilon > 0$, $x \in (0,1)^n$,

$$r = \left(\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$u(x) = r^{-\varepsilon} - 2^{\varepsilon}$ при $r^{-\varepsilon} \geq 2^{\varepsilon}$ та $u(x) = 0$ при $r^{-\varepsilon} < 2^{\varepsilon}$. Перевірити, що

$$u \in H^s_{per}((0,1)^2) \qquad \text{при} \qquad s < \frac{n}{2} - \varepsilon. \tag{5.6}$$

)

Теорема 5.19 (Соболєва про вкладення для 1-періодичних функцій). *Нехай*

$$s > \frac{n}{2}\,.$$

Тоді для цілого l виконані неперервні вкладення

$$H^s_{per}((0,1)^n) \subset C^0([0,1]^n) \qquad \text{та} \qquad H^{s+l}_{per}((0,1)^n) \subset C^l([0,1]^n) \qquad \text{при} \qquad l \geq 0.$$

$\triangleleft$ Нехай $u = \sum \alpha_m \, e^{(x,m)\, 2\pi i} \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)$ при $\frac{n}{2} < s$ і, наприклад, $l = 1$. Тоді

$$|\nabla u|^2 = \Big| \sum (2\pi\, i\, m)\, \alpha_m \, |m|^s \, |m|^{-s} \, e^{(x,m)\, 2\pi i} \Big|^2 \le$$

$$\le \Big| \sum \alpha_m^2 \, |m|^{2(s+1)} \Big| \, \Big| (2\pi)^2 \sum |m|^{-2s} \Big| = c \, \|u\|^2_{*(s+1)} \,,$$

оскільки $c = (2\pi)^2 \sum |m|^{-2s} < \infty$ при $\frac{n}{2} < s$. Дійсно, визначимо множину

$$M_j = \{ \, m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n_* \, : \, \max_{1 \le k \le n} \, |m_k| = j \, \}.$$

Число елементів в M_j не перевищує $2n(2j)^{n-1}$. Наприклад, для $n = 2$ при $j \ge 2$ до M_j належать

$$(j, j), (j, j-1), (j, j-2), \ldots, (j, 0), (j, -1), \ldots, (j, -j),$$

$$-(j, j), -(j, j-1), -(j, j-2), \ldots, -(j, 0), -(j, -1), \ldots, -(j, -j)$$

і аналогічні вектори (m_1, m_2), в яких m_1 і m_2 переставлені місцями, за виключенням $(j, j), (j, -j), (-j, j), (-j, -j)$. Для кожного $m \in M_j$ маємо $|m|^2 \ge j$ і тому

$$s_j = \sum_{m \in M_j} |m|^{-2s} \le 2n \, (2j)^{n-1} \, j^{-2s}$$

для $j \ge 1$, звідки маємо, що

$$\sum_{m \in Z^n_*} |m|^{-2s} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j \, \le 2n \sum_{j=1}^{\infty} j^{-(2s-n+1)}$$

і ряд $\sum |m|^{-2s}$ збігається при $2s - n + 1 > 1$ ($\Leftrightarrow 2s > n$).

Таким чином, отримуємо

$$\|\nabla u\|_{C^0([0,1]^n)^n} \le C \, \|u\|_{H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)}.$$

Аналогічно, можна встановити, що

$$\|u\|_{C^0([0,1]^n)} \le C \, \|u\|_{H^{s}_{pe*}((0,1)^n)}$$

і доведення цієї теореми завершується як і доведення теореми 5.17 з урахуванням, якщо необхідно, індукції по l. $\triangleright$

Теорема вкладення для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється наступним чином.

Теорема 5.20 (Соболєва про вкладення). *Нехай область* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $1 \le p < \infty$ *та ціле* s *таке, що*

$$s > \frac{n}{p}\,.$$

Тоді для цілого l *виконані неперервні вкладення*

$$W^{s,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}) \qquad і \qquad W^{s+l,p}(\Omega) \subset C^l(\overline{\Omega}) \qquad при \qquad l \ge 0.$$

Зокрема $H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ *при* $n = 2, 3$ *і* $H^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ *при* $n = 1$. $\lhd \rhd$

(**Завдання для самостійної роботи:** Нехай $M \subset \mathbf{Z}^n$ є скінченною множиною, $\alpha_m \in \mathbf{C}$ та дійсні числа σ_m є додатними при $m \in M$. Перевірити, що

$$\left(\sum_{m\in M} \alpha_m\right)^2 \le \left(\sum_{m\in M} \sigma_m\, \alpha_m^2\right)\left(\sum_{m\in M} \sigma_m^{-1}\right). \qquad (5.7))$$

Теорема 5.21 (про оператор сліду). *Припустимо, що ціле* d *і дійсне* s *задовольняють нерівностям* $1 \le d < n$ і

$$s > \frac{d}{2}\,.$$

Нехай $u \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n \cap H^s_{pe*}((0,1)^n)$. *Тоді існує постійна* $C = C(s,d)$ *така, що*

$$\|\, u|_{\,x_1=0,\ldots,\,x_d=0}\,\|_{H^{s-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d})} \le C\ \|u\|_{H^s_{pe*}((0,1)^n)}\,. \qquad (5.8)$$

$\lhd$ Для $x \in [0,1]^n$ і $m \in \mathbf{Z}^n$ позначимо $\tilde{x}_1 = (x_1, \ldots, x_d)$, $\tilde{x}_2 = (x_{d+1}, \ldots, x_n)$, $\widetilde{m}_1 = (m_1, \ldots, m_d)$ і $\widetilde{m}_2 = (m_{d+1}, \ldots, m_n)$, тоді можна вважати, що

$$m = \widetilde{m}_1 + \widetilde{m}_2$$

у сенсі виконання рівності $m = (m_1, \ldots, m_d, 0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0, m_{d+1}, \ldots, m_n)$.

За визначенням

$$u = \sum_m \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i} = \sum_{\widetilde{m}_2}\sum_{\widetilde{m}_1} \alpha_{\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2}\, e^{(\tilde{x}_1,\,\widetilde{m}_1)\,2\pi\, i}\, e^{(\tilde{x}_2,\,\widetilde{m}_2)\,2\pi\, i}$$

і

$$u|_{\,\tilde{x}_1=0} = \sum_{\widetilde{m}_2} \beta_{\widetilde{m}_2}\, e^{(\tilde{x}_2,\,\widetilde{m}_2)\,2\pi\, i} \qquad \text{для} \qquad \beta_{\widetilde{m}_2} = \sum_{\widetilde{m}_1} \alpha_{\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2}\,.$$

Надалі із нерівності (5.7) випливає, що

$$|\widetilde{m}_2|^{\,2s-d}\,\beta^2_{\widetilde{m}_2} \le \left(\sum_{\widetilde{m}_1} (|\widetilde{m}_1|^2 + |\widetilde{m}_2|^2)^{\,s}\,\alpha^2_{\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2}\right)|\widetilde{m}_2|^{\,2s-d}\sum_{\widetilde{m}_1}(|\widetilde{m}_1|^2 + |\widetilde{m}_2|^2)^{-s} \le$$

$$\le\ c\sum_{\widetilde{m}_1}(|\widetilde{m}_1|^2 + |\widetilde{m}_2|^2)^{\,s}\,\alpha^2_{\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2}, \qquad (5.9)$$

оскільки $c = |\widetilde{m}_2|^{2s-d} \sum_{\widetilde{m}_1 \in Z^d} (|\widetilde{m}_1|^2 + |\widetilde{m}_2|^2)^{-s} < \infty$ як при доведені теореми 5.19.

Таким чином, обчислюючи суму $\sum_{\widetilde{m}_2}$ від (5.9) маємо нерівність (5.8). $\triangleright$

Ця теорема означає, що відображення обчислення значення функції

$$u \mapsto u|_{x_1=0,\ldots,x_d=0}$$

є обмеженим як оператор із $\mathrm{Trig}\,[0,1]^n \cap H^s_{pe*}((0,1)^n)$ в $H^{s-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d})$. Цей оператор називається *оператором d-сліду* або просто *сліду* і є визначеним як оператор із $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ в $H^{s-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d})$ згідно з теоремою про продовження операторів по неперервності (теорема 4.1). Такий оператор позначається

$$\mathrm{Tr}|_{x_1=0,\ldots,x_d=0} \,:\, H^s_{pe*}((0,1)^n) \,\to\, H^{s-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d}).$$

Нехай $\sigma \in \mathbf{R}^n$ і $u \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$, тоді визначено відображення

$$T_\sigma \,:\, u(x) \,\mapsto\, u(x+\sigma) = \sum_m \left(\alpha_m\, e^{(\sigma,m)\,2\pi i}\right) e^{(x,m)\,2\pi i},$$

яке називається *оператором зсуву на вектор* $\sigma \in \mathbf{R}^n$. Із визначень і рівності $\alpha_m^2 = \alpha_m\,\overline{\alpha}_m = \left(\alpha_m\, e^{(\sigma,m)\,2\pi i}\right)\left(\overline{\alpha}_m\, e^{-(\sigma,m)\,2\pi i}\right)$ для $m \in \mathbf{Z}^n$ відразу ж випливає, що

$$\|T_\sigma(u)\|_{*(s)} = \|u\|_{*(s)},$$

тобто оператор зсуву є ізометрією простору $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ для кожного $\sigma \in \mathbf{R}^n$.

Із цієї рівності і теореми 5.21 отримуємо при $1 \le d < n$, що відображення обчислення значення функції

$$u \mapsto u|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d}$$

є обмеженим оператором із $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ в $H^{s-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d})$ при $\sigma \in [0,1]^d$ і $s > d/2$. Більш того, і теорему 5.19 можна розглядати як твердження про обмеженість відображення обчислення значення функції

$$u \mapsto u|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_n=\sigma_n}$$

з $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ в $\mathbf{C} = H^{s-n/2}_{pe*}((0,1)^{n-n})$ при $d = n$, $\sigma \in [0,1]^n$ і $s > n/2$. В силу (5.6) таке відображення може бути невизначеним при $\sigma \in [0,1]^n$ і $s < n/2$.

Таким чином, для кожного $k = 1, \ldots, n$ при $\sigma \in [0,1]^n$ і $s > 1/2$ мають сенс і виконані умови 1-*періодичності*

$$u|_{x_k=\sigma_k} = u|_{x_k=\sigma_k+1} \qquad \text{в} \qquad H^{s-1/2}_{pe*}((0,1)^{n-1})$$

для $u \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ (тобто $u(x) = u(x+m)$ $\forall\, x \in \mathbf{R}^n$, $\forall\, m \in \mathbf{Z}^n$), оскільки ці умови виконані для $u \in \operatorname{Trig}[0,1]^n$.

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що для кожного $l = 1, \ldots$ і $k = 1, \ldots, n$ при $s > 1/2 + l$ і $u \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ мають сенс і виконані умови 1-*періодичності для нормальних похідних*

$$\left.\frac{\partial^l u(x)}{\partial^l x_k}\right|_{x_k=0} = \left.\frac{\partial^l u(x)}{\partial^l x_k}\right|_{x_k=1} \qquad \text{в} \qquad H^{s-l-1/2}_{pe*}((0,1)^{n-1}).\,)$$

Теорема 5.22 (про ліпшицевість обчислення сліду). *Нехай ціле* d *і дійсне* s *задовольняють нерівностям* $1 \le d \le n$ і

$$s > \frac{d}{2}\,.$$

Тоді існує постійна $C = C(s,d)$ *така, що*

$$\|\, u|_{x_1=\sigma_1+\tau_1,\ldots,\, x_d=\sigma_d+\tau_d} - u|_{x_1=\sigma_1,\ldots,\, x_d=\sigma_d} \|_{H^{s-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d})} \le |\tau|\, C\, \|u\|_{H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)}$$

для $u \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)$ *і* $\sigma, \tau \in \mathbf{R}^d$.

$\triangleleft$ Як і при доведені теореми 5.21 для $u = \sum_m \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i}$ маємо

$$u|_{\widetilde{x}_1=\sigma+\tau} = \sum_{\widetilde{m}_2} \beta^{\sigma+\tau}_{\widetilde{m}_2} e^{(\widetilde{x}_2,\, \widetilde{m}_2)\,2\pi\, i} \qquad \text{для} \qquad \beta^{\sigma+\tau}_{\widetilde{m}_2} = \sum_{\widetilde{m}_1} e^{(\sigma+\tau,\, \widetilde{m}_1)\,2\pi\, i} \alpha_{\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2}\,,$$

$$u|_{\widetilde{x}_1=\sigma} = \sum_{\widetilde{m}_2} \beta^{\sigma}_{\widetilde{m}_2} e^{(\widetilde{x}_2,\, \widetilde{m}_2)\,2\pi\, i} \qquad \text{для} \qquad \beta^{\sigma}_{\widetilde{m}_2} = \sum_{\widetilde{m}_1} e^{(\sigma,\, \widetilde{m}_1)\,2\pi\, i} \alpha_{\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2}$$

і

$$u|_{\widetilde{x}_1=\sigma+\tau} - u|_{\widetilde{x}_1=\sigma} = \sum_{\widetilde{m}_2} \left(\beta^{\sigma+\tau}_{\widetilde{m}_2} - \beta^{\sigma}_{\widetilde{m}_2}\right) e^{(\widetilde{x}_2,\, \widetilde{m}_2)\,2\pi\, i}.$$

Надалі із нерівності (5.7) як в (5.9) випливає, що

$$|\widetilde{m}_2|^{\,2s-d} \left(\beta^{\sigma+\tau}_{\widetilde{m}_2} - \beta^{\sigma}_{\widetilde{m}_2}\right)^2 \le\, c \sum_{\widetilde{m}_1} (|\widetilde{m}_1|^2 + |\widetilde{m}_2|^2)^{\,s}\, \alpha^2_{\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2} \left(e^{(\tau,\, \widetilde{m}_1)\,2\pi\, i} - 1\right)^2.$$

Тому із співвідношень

$$\left(e^{(\omega,\,m)\,2\pi\,i}-1\right)^2=\left(\cos\left((\omega,\,m)\,2\pi\right)-1\right)^2+\left(\sin\left((\omega,\,m)\,2\pi\right)\right)^2\;= \tag{5.10}$$

$$=\;2\left(1-\cos\left((\omega,\,m)\,2\pi\right)\right)=4\left(\sin\left((\omega,\,m)\,\pi\right)\right)^2\leq 4\pi^2(\omega,\,m)^2\leq 4\pi^2|\omega|^2|m|^2$$

виконаних для $\omega\in\mathbf{R}^n$ і $m\in\mathbf{Z}^n$ випливає, що

$$|\widetilde{m}_2|^{\,2s-d}\left(\beta^{\sigma+\tau}_{\widetilde{m}_2}-\beta^{\sigma}_{\widetilde{m}_2}\right)^2\leq\;4\pi^2c\,|\tau|^2\sum_{\widetilde{m}_1}\left(|\widetilde{m}_1|^2+|\widetilde{m}_2|^2\right)^s\alpha^2_{\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2}\left(|\widetilde{m}_1|^2+|\widetilde{m}_2|^2\right)$$

та обчислюючи $\sum_{\widetilde{m}_2}$, маємо необхідну нерівність. $\triangleright$

Теорема 5.23 (про неперервність обчислення сліду). *Нехай ціле d і дійсне s задовольняють нерівностям* $1\leq d\leq n$ і

$$s>\frac{d}{2}\,.$$

Тоді для $u\in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ і $\sigma,\tau\in\mathbf{R}^d$ маємо

$$\|\,u|_{\,x_1=\sigma_1+\tau_1,\ldots,\,x_d=\sigma_d+\tau_d}-u|_{\,x_1=\sigma_1,\ldots,\,x_d=\sigma_d}\,\|_{H^{s-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d})}\to 0\qquad \text{\textit{при}}\qquad |\tau|\to 0.$$

$\triangleleft$ Як і при доведені теореми 5.22 для $u=\sum_m\,\alpha_m\,e^{(x,\,m)\,2\pi\,i}$ отримуємо

$$\sum_{\widetilde{m}_2}|\widetilde{m}_2|^{\,2s-d}\left(\beta^{\sigma+\tau}_{\widetilde{m}_2}-\beta^{\sigma}_{\widetilde{m}_2}\right)^2\leq\;c\sum_{m=\widetilde{m}_1+\widetilde{m}_2}|m|^{2s}\,\alpha^2_m\left(e^{(\tau,\,\widetilde{m}_1)\,2\pi\,i}-1\right)^2\;\leq$$

$$\leq\;c\sum_{|m|\leq M}|m|^{2s}\,\alpha^2_m\left(e^{(\tau,\,\widetilde{m}_1)\,2\pi\,i}-1\right)^2\;+\;4\,c\sum_{|m|>M}|m|^{2s}\,\alpha^2_m\,,$$

оскільки $\left(e^{(\tau,\,\widetilde{m}_1)\,2\pi\,i}-1\right)^2\leq 4$. Для будь-якого $\varepsilon>0$ можна обрати та фіксувати $M\in\mathbf{Z}$ так, щоб

$$4\,c\sum_{|m|>M}|m|^{2s}\,\alpha^2_m\;<\;\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

де враховано, що $u\in H^s_{pe*}((0,1)^n)$. Надалі можна обрати достатньо мале $\delta>0$ так, щоб

$$c\sum_{|m|\leq M}|m|^{2s}\,\alpha^2_m\left(e^{(\tau,\,\widetilde{m}_1)\,2\pi\,i}-1\right)^2\;<\;\frac{\varepsilon}{2}$$

при $|\tau|<\delta$, оскільки $\left(e^{(\tau,\,\widetilde{m}_1)\,2\pi\,i}-1\right)\to 0$ при $|\tau|\to 0$ і $|m|\leq M$. Таким чином,

$$\|\,u|_{\,x_1=\sigma_1+\tau_1,\ldots,\,x_d=\sigma_d+\tau_d}-u|_{\,x_1=\sigma_1,\ldots,\,x_d=\sigma_d}\,\|_{H^{s-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d})}<\varepsilon\qquad \text{\textit{при}}\quad |\tau|<\delta.\quad\triangleright$$

Для $\sigma \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ різницевим співвідношенням для $u \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ називається елемент $u^\sigma \in H^s_{pe*}((0,1)^n$, який визначається рівністю

$$u^\sigma = \frac{u(x+\sigma) - u(x)}{|\sigma|}.$$

Для $u = \sum_m \alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i}$ маємо

$$u^\sigma = \sum_m \alpha_m \left(e^{(\sigma,m)\,2\pi i} - 1\right) |\sigma|^{-1} e^{(x,m)\,2\pi i}. \tag{5.11}$$

Із співвідношень (5.10) випливає, що для $u \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)$ всі різницеві співвідношення u^σ рівномірно обмежені у нормі $H^s_{pe*}((0,1)^n)$, тобто

$$\|u^\sigma\|_{*s} \le 2\pi \, \|u\|_{*(s+1)} \qquad \text{для кожного} \qquad \sigma \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Насправді виконано і таке зворотне твердження.

Теорема 5.24. *Нехай* $u \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ *для* $s \in \mathbf{R}$ *та існує стала* C *така, що*

$$\|u^\sigma\|_{*s} \le C \qquad \textit{для кожного} \qquad \sigma \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Тоді $u \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)$.

◁ Для $u = \sum \alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i} \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ із умов теореми і (5.11) випливає, що

$$\sum_m \alpha_m^2 \, |m|^{2s} \left(e^{(\sigma,m)\,2\pi i} - 1\right)^2 |\sigma|^{-2} \le C^2 \qquad \text{для кожного} \qquad \sigma \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Для $\sigma = (0, \ldots, \sigma_l, 0, \ldots, 0)$ при $\sigma_l \to 0$ маємо $\left(e^{(\sigma,m)\,2\pi i} - 1\right)^2 |\sigma|^{-2} \to 4\pi^2 |m_l|^2$ і тому

$$4\pi^2 \sum_m \alpha_m^2 \, |m|^{2s} \, |m_l|^2 \le C^2 \qquad \text{для} \qquad 1 \le l \le n.$$

Таким чином, доведена нерівність $\|u\|^2_{*(s+1)} \le n\, C^2/(4\pi^2)$. ▷

Теорема 5.25. *Нехай* $u \in H^t_{pe*}((0,1)^n)$ *і* $r, s, t \in \mathbf{R}$ *такі, що* $r < s < t$.

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ *існує постійна* C_ε *така, що*

$$\|u\|^2_{*s} \le \varepsilon \, \|u\|^2_{*t} + C_\varepsilon \, \|u\|^2_{*r}.$$

◁ Для $\delta > 0$ маємо $1 \le \delta^{t-s} + \left(\frac{1}{\delta}\right)^{s-r}$, оскільки або $\delta \ge 1$, або $\delta^{-1} \ge 1$. Таким чином, при $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{t-s}} |m|^2$ для $m \in \mathbf{Z}^n_*$ отримуємо

$$|m|^{2s} \le \varepsilon \, |m|^{2t} + \varepsilon^{\frac{r-s}{t-s}} \, |m|^{2r}.$$

Звідки випливає необхідна нерівність при $C_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{r-s}{t-s}}$. ▷

Теорема 5.26. *Для фіксованого* $s \in \mathbf{R}$ *розглянемо оператор градієнта* ∇ *як лінійний оператор із* $(\mathrm{Trig}\,[0,1]^n, \|\cdot\|_{*(s+1)})$ *в* $(H^s_{pe*}((0,1)^n)^n, \|\cdot\|_{H^s_{pe*}((0,1)^n)^n})$. *Тоді* $\nabla \in B(\mathrm{Trig}\,[0,1]^n, H^s_{pe*}((0,1)^n)^n)$,

$$\exists\, 1 \quad \overline{\nabla} \in B(H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n), H^s_{pe*}((0,1)^n)^n) \; : \qquad \overline{\nabla}(v) = \nabla(v) \qquad \forall v \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$$

і

$$\| \overline{\nabla} \|_{B(H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n), H^s_{pe*}((0,1)^n)^n)} = 2\pi.$$

$\triangleleft$ Нехай $u = \sum_{\{m \in Z^n_* : \, |m| \le M\}} \alpha_m \, e^{(x,m)\, 2\pi i} \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$. Тоді

$$\nabla u(x) = \sum_{\{m \in Z^n_* : \, |m| \le M\}} \Lambda_m \, e^{(x,m)\, 2\pi i},$$

де $\Lambda_m = 2\pi i \alpha_m \, m = 2\pi i \alpha_m (m_1, \ldots, m_n)$. Таким чином, $\Lambda^2_m = 4\pi^2 |m|^2 \alpha^2_m$ і

$$\|\nabla u\|^2_{H^s_{pe*}((0,1)^n)^n} = \sum_{m \in Z^n_*} |m|^{2s} \Lambda^2_m = 4\pi^2 \sum_{m \in Z^n_*} |m|^{2(s+1)} \alpha^2_m = 4\pi^2 \, \|u\|^2_{*(s+1)} \,.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. $\triangleright$

Таким чином, для "функції" $u \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)$ визначені частині похідні

$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k} \qquad \text{при} \qquad k = 1, \ldots, n$$

як елементи простору $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ для $s \in \mathbf{R}$.

Аналогічно для $u = (u_1, \ldots, u_n) = \sum (\alpha^1_m, \ldots, \alpha^n_m) \, e^{(x,m)\, 2\pi i} \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)^n$ можна визначити оператор дивергенції із $H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)^n$ в $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ рівністю

$$\mathrm{div}\, u = \partial_1 u + \ldots + \partial_n u = 2\pi i \sum_m \left(m_1 \, \alpha^1_m + \ldots + m_n \, \alpha^n_m \right) e^{(x,m)\, 2\pi i}.$$

Теорема 5.27 (слабка апроксимація похідних). *Нехай* $s \in \mathbf{R}$ *і ціле* k *таке, що* $1 \le k \le n$.

Тоді для $u \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^n)$ *і* $\sigma = (0, \ldots, 0, \sigma_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ *при* $\sigma_k > 0$ *маємо*

$$\| u^\sigma - \partial_k u \|_{H^s_{pe*}((0,1)^n)} \to 0 \qquad \text{при} \qquad |\sigma| \to 0.$$

$\triangleleft$ Враховуючи (5.11), для $u = \sum_m \alpha_m \, e^{(x,m)\, 2\pi i}$ отримуємо

$$u^\sigma - \partial_k u = \sum_m \alpha_m \left(\frac{e^{\sigma_k \, m_k \, 2\pi i} - 1}{\sigma_k} - m_k \, 2\pi i \right) e^{(x,m)\, 2\pi i} =$$

$$= \sum_m \alpha_m m_k\, 2\pi\, i \left(e^{\sigma_k\, \theta\, m_k\, 2\pi\, i} - 1 \right) e^{(x,\, m)\, 2\pi\, i}$$

при $0 < \theta < 1$, де врахована формула Тейлора ($e^{i\varrho} = \cos(\varrho) + i\sin(\varrho) = 1 + \varrho\, e^{i\theta\varrho}$). Таким чином, як і при доведені теореми 5.23, маємо

$$\| \, u^{\sigma} \, - \partial_k u \, \|_{H^s_{pe*}((0,1)^n)} \to 0 \qquad \text{при} \qquad |\sigma| \to 0. \qquad \triangleright$$

Аналогічно доводяться наступні два твердження.

Теорема 5.28 (слабка апроксимація похідних із оцінкою). *Нехай $s \in \mathbf{R}$ і ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$. Тоді існує постійна $C = C(s)$ така, що*

$$\| \, u^{\sigma} \, - \partial_k u \, \|_{H^s_{pe*}((0,1)^n)} \leq |\sigma| \, C \, \|u\|_{H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)}$$

для $u \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$ і $\sigma = (0, \ldots, 0, \sigma_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ при $\sigma_k > 0$. $\triangleleft \triangleright$

Теорема 5.29 (слабка формула Тейлора першого порядку). *Нехай $s \in \mathbf{R}$ і ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$. Тоді існує постійна $C = C(s)$ така, що*

$$\| \, u(x+\sigma) - u(x) - \sigma_1 \partial_1 u(x) - \ldots - \sigma_n \partial_n u(x) \, \|_{H^s_{pe*}((0,1)^n)} \leq |\sigma|^2 C \, \|u\|_{H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)}$$

для $u \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$ і $\sigma \in \mathbf{R}^n$. $\triangleleft \triangleright$

Композиція операторів $-\mathrm{div}$ і ∇ називається *оператором Лапласа*, який позначається $-\Delta$, визначається для $u = \sum \alpha_m e^{(x,\, m)\, 2\pi\, i} \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$ рівностями

$$-\Delta\, u \, = -\mathrm{div}\,(\nabla u) \, = \, - \partial_1^2 u \, - \ldots - \, \partial_n^2 u \, = \, (2\pi)^2 \sum_m \, |m|^2 \, \alpha_m \, e^{(x,\, m)\, 2\pi\, i}$$

та є неперервним лінійним відображенням із $H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$ в $H^s_{pe*}((0,1)^n)$, а також із $H^{\infty}_{pe*}((0,1)^n)$ в $H^{\infty}_{pe*}((0,1)^n)$ та із $H^{-\infty}_{pe*}((0,1)^n)$ в $H^{-\infty}_{pe*}((0,1)^n)$, де за визначенням $H^{\infty}_{pe*}((0,1)^n) = \cap_{s \in R} H^s_{pe*}((0,1)^n)$ та $H^{-\infty}_{pe*}((0,1)^n) = \cup_{s \in R} H^s_{pe*}((0,1)^n)$.

Теорема 5.30 ($\exists 1$ слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона). *Нехай* $s \in \mathbf{R}$ і $f \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$. *Тоді* $\exists 1$ *розв'язок задачі:*

$$\text{знайти} \quad u \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n) : \qquad -\Delta\, u \, = f \qquad \text{в} \quad H^s_{pe*}((0,1)^n). \tag{5.12}$$

$\triangleleft$ Дійсно, якщо $f = \sum_m \alpha_m \, e^{(x,\, m)\, 2\pi\, i} \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$, тоді

$$u \, = \, (2\pi)^{-2} \sum_m \, |m|^{-2} \, \alpha_m \, e^{(x,\, m)\, 2\pi\, i}$$

визначає розв'язок $u \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$ задачі (5.12). $\triangleright$

Відображення $f \mapsto u$, яке зіставляє кожному $f \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ єдиний розв'язок $u \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$ задачі (5.12), позначається через $(-\Delta)^{-1}$ і називається *зворотним оператором* до оператора Лапласа. Таким чином, $u = (-\Delta)^{-1} f$ та

$$(-\Delta)^{-1} \; : \; H^s_{pe*}((0,1)^n) \to H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$$

є неперервним лінійним взаємно однозначним відображенням.

Із теореми (Соболєва) 5.19 і теореми 5.30 отримуємо наступне твердження.

Теорема 5.31 (про класичний розв'язок 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона). *Нехай $s \in \mathbf{R}$ таке, що*

$$s > \frac{n}{2} \; ,$$

$f \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ та $u \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$ є розв'язком задачі (5.12). Тоді

$$f \in C^0([0,1]^n) \qquad i \qquad u \in C^2([0,1]^n). \qquad \triangleleft \; \triangleright$$

При $n = 3$ для вектор-функції

$$u = (u_1, u_2, u_3) = \sum (\alpha^1_m, \alpha^2_m, \alpha^3_m)\, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^3)^3$$

оператор ротора із $H^{s+1}_{pe*}((0,1)^3)^3$ в $H^s_{pe*}((0,1)^3)^3$ визначається рівністю

$$\operatorname{rot} u \; = \; \operatorname{rot}(u_1, u_2, u_3) \; = \; (\, \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \, , \, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \, , \, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \,) \; =$$

$$= \; 2\pi\, i \sum_m \Big(m_2\, \alpha^3_m - m_3\, \alpha^2_m \, , \, m_3\, \alpha^1_m - m_1\, \alpha^3_m \, , \, m_1\, \alpha^2_m - m_2\, \alpha^1_m \Big) \, e^{(x,m)\,2\pi\, i}.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що для $u, v \in H^s_{pe*}((0,1)^3)^3$ і $w \in H^s_{pe*}((0,1)^3)$ виконуються рівності

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} u \; = 0, \qquad \operatorname{div} \Delta\, u \; = \Delta \operatorname{div} u, \qquad \operatorname{rot} \nabla\, w \; = 0,$$

$$-\Delta\, u \; = \; -\nabla \operatorname{div} u \; + \; \operatorname{rot}\operatorname{rot} u. \tag{5.13}$$)

При $n = 2$ і $n > 3$ прийнято визначати два оператори ротора rot^* і rot так, щоб виконувалася рівність $-\Delta = -\nabla \operatorname{div} + \operatorname{rot}^* \operatorname{rot}$, аналогічна (5.13). Наприклад, при $n = 2$ для вектор-функції $u = (u_1, u_2) = \sum (\alpha^1_m, \alpha^2_m)\, e^{(x,m)\,2\pi\, i}$ із $H^{s+1}_{pe*}((0,1)^2)^2$ та функції $v = \sum \beta_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^2)$ визначають

$$\operatorname{rot} u \; = \; \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \; = \; 2\pi\, i \sum_m \Big(m_1\, \alpha^2_m - m_2\, \alpha^1_m \Big) \, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^s_{pe*}((0,1)^2),$$

$$\operatorname{rot}^* v \; = \; (\, \partial_2 v, -\partial_1 v \,) \; = \; 2\pi\, i \sum_m \, (\, m_2\, \beta_m \, , -m_1\, \beta_m \,) \, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^s_{pe*}((0,1)^2)^2.$$

Теорема 5.32 (формула інтегрування частинами). *Нехай фіксовано* $s \in \mathbf{R}$, $u \in H^s_{pe*}((0,1)^n)^n$ *і* $v \in H^{-s+1}_{pe*}((0,1)^n)$. *Тоді*

$$\int\limits_{(0,1)^n} (-\operatorname{div} u)\, \overline{v}\, dx = \int\limits_{(0,1)^n} (u, \nabla \overline{v})\, dx. \tag{5.14}$$

$\triangleleft$ Для вектор-функцій

$$u = (u_1, \ldots, u_n) = \sum (\alpha^1_m, \ldots, \alpha^n_m)\, e^{(x,\,m)\,2\pi\, i} \in H^s_{pe*}((0,1)^n)^n,$$

$$w = (w_1, \ldots, w_n) = \sum (\beta^1_m, \ldots, \beta^n_m)\, e^{(x,\,m)\,2\pi\, i} \in H^{-s}_{pe*}((0,1)^n)^n$$

за визначенням маємо

$$\int\limits_{(0,1)^n} (u, \overline{w})\, dx = \int\limits_{(0,1)^n} u_1\, \overline{w}_1\, dx + \ldots + \int\limits_{(0,1)^n} u_n\, \overline{w}_n\, dx \; =$$

$$= \sum \alpha^1_m\, \overline{\beta}^1_m + \ldots + \sum \alpha^n_m\, \overline{\beta}^n_m.$$

Таким чином, якщо $v = \sum \gamma_m\, e^{(x,\,m)\,2\pi\, i} \in H^{-s+1}_{pe*}((0,1)^n)$, то

$$\int\limits_{(0,1)^n} (u, \overline{\nabla v})\, dx = \sum \alpha^1_m\, (-2\pi\, i\, m_1)\overline{\gamma}_m + \ldots + \sum \alpha^n_m\, (-2\pi\, i\, m_n)\overline{\gamma}_m$$

та

$$\int\limits_{(0,1)^n} (-\operatorname{div} u)\, \overline{v}\, dx = (-2\pi\, i) \sum \alpha^1_m\, m_1 \overline{\gamma}_m + \ldots + \sum \alpha^n_m\, m_n \overline{\gamma}_m. \qquad \triangleright$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що для $u \in H^s_{pe*}((0,1)^3)^3$ і $v \in H^{-s+1}_{pe*}((0,1)^3)^3$ виконується формула інтегрування частинами

$$\int\limits_{(0,1)^3} (\operatorname{rot} u, \overline{v})\, dx = \int\limits_{(0,1)^3} (u, \overline{\operatorname{rot} v})\, dx.\ )$$

Теорема 5.33 (про розкладання Ходжа). *Нехай* $s \in \mathbf{R}$ *і* $v \in H^s_{pe*}((0,1)^3)^3$. *Тоді існують* $\varphi \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^3)$ *і* $\psi \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^3)^3$ *такі, що*

$$v \;=\; \nabla\varphi \;+\; \operatorname{rot}\psi. \tag{5.15}$$

$\triangleleft$ Із теореми 5.30 випливає, що

$$\exists\, 1 \;\; u \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^3)^3 \;\; : \quad -\Delta\, u \;=\; v. \tag{5.16}$$

Таким чином, враховуючи (5.13), маємо (5.15) із $\varphi = -\operatorname{div} u$ та $\psi = \operatorname{rot} u$. $\triangleright$

Теорема 5.34 (представлення Вейля соленоїдальних векторів). *Нехай* $s \in \mathbf{R}$, $v \in H^s_{pe*}((0,1)^3)^3$ *та* $\operatorname{div} v = 0$. *Тоді існує* $\psi \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^3)^3$ *таке, що*

$$v = \operatorname{rot} \psi.$$

$\lhd$ Застосовуючи оператор дивергенції до (5.16), отримуємо $\Delta\varphi = 0$. Таким чином, $\varphi = 0$ і розкладання (5.15) має вигляд $v = \operatorname{rot} \psi$. $\rhd$

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 5.35 (представлення Вейля безвихоровіх векторів). *Нехай* $s \in \mathbf{R}$, $v \in H^s_{pe*}((0,1)^3)^3$ *та* $\operatorname{rot} v = 0$. *Тоді існує* $\varphi \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^3)$ *таке, що*

$$v = \nabla\varphi. \qquad \lhd \ \rhd$$

Для $s \in \mathbf{R}$ і $u = \sum \alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i} \in H^{s+2}_{pe*}((0,1)^n)$ за визначенням

$$-\Delta\, u = (2\pi)^2 \sum_m |m|^2 \alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i}.$$

Це визначення дозволяє задати для кожного $r \in \mathbf{R}$ і $u = \sum \alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i}$ із $H^{s+2r}_{pe*}((0,1)^n)$ степінь $(-\Delta)^r$ оператора $-\Delta$ рівністю

$$(-\Delta)^r u = (2\pi)^{2r} \sum_m |m|^{2r} \alpha_m e^{(x,m)\,2\pi i},$$

яка є неперервним лінійним оператором із $H^{s+2r}_{pe*}((0,1)^n)$ в $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ таким, що $(-\Delta)^r(-\Delta)^t = (-\Delta)^{r+t}$, $\nabla(-\Delta)^r = (-\Delta)^r\nabla$ і $\operatorname{div}(-\Delta)^r = (-\Delta)^r\operatorname{div}$ для $t \in \mathbf{R}$.

Безпосередньо із визначень також випливає, що норма

$$\|u\|_{\star s} = \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{*0} = \left(\int_{(0,1)^n} ((-\Delta)^{s/2}u)^2\, dx\right)^{1/2}$$

еквівалентна нормі $\|u\|_{*s}$ для $u \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$.

Для $n = 3$ і $u \in H^{s+1}_{pe*}((0,1)^3)^3$ із формул інтегрування частинами та рівності $-\Delta = -\nabla\operatorname{div} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}$ маємо

$$\|u\|^2_{\star(s+1)} = \int_{(0,1)^3} ((-\Delta)(-\Delta)^{s/2}u, (-\Delta)^{s/2}\overline{u})\, dx =$$

$$= \int_{(0,1)^3} ((-\Delta)^{s/2}(\operatorname{div} u))^2\, dx + \int_{(0,1)^3} ((-\Delta)^{s/2}(\operatorname{rot} u))^2\, dx = \|\operatorname{div} u\|^2_{\star(s)} + \|\operatorname{rot} u\|^2_{\star(s)},$$

тобто $H^{s+1}_{pe*}((0,1)^3)^3 = \{u \in H^{-\infty}_{pe*}((0,1)^3)^3 : \operatorname{div} u \in H^s_{pe*}((0,1)^3),\ \operatorname{rot} u \in H^s_{pe*}((0,1)^3)^3\}$.

6. Слабка збіжність.

B6.1. Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *слабко збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \rightharpoonup x$), якщо

$$f(x_k) \to f(x) \quad \text{при} \quad k \to \infty \qquad \forall\, f \in L^* = B(L, \mathbf{C}).$$

Зокрема, послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ гільбертового простору $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ є *слабко збіжною* до $x \in H$, якщо

$$\langle x_k, h\rangle_H \to \langle x, h\rangle_H \quad \text{при} \quad k \to \infty \qquad \forall\, h \in H = H^* = B(H, \mathbf{C}).$$

Припустимо, що $x_k \rightharpoonup x$ і $x_k \rightharpoonup y$, тоді $f(x-y) = 0\ \forall\, f \in L^*$. Звідки маємо $x = y$, тобто слабка границя є єдиною.

Теорема 6.2 (Банаха-Штейнхауса). *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором і $x_k \rightharpoonup x$. Тоді існує стала $C > 0$ така,що*

$$\sup_k \|x_k\|_L \le C. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

B6.3. Розглянемо послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$, множина межових точок якої позначається через $\lim\mathrm{Pt}\,\{\alpha_k\}$ (тобто $\alpha_0 \in \lim\mathrm{Pt}\,\{\alpha_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $\alpha_l \to \alpha_0$). *Верхня та нижня границі* цієї послідовності визначаються рівностями

$$\limsup_{k\to\infty} \alpha_k \;=\; \sup\{\,\alpha \,:\, \alpha \in \lim\mathrm{Pt}\,\{\alpha_k\}\},$$
$$\liminf_{k\to\infty} \alpha_k \;=\; \inf\{\,\alpha \,:\, \alpha \in \lim\mathrm{Pt}\,\{\alpha_k\}\}.$$

Відомо і безпосередньо перевіряється, що кожна обмежена послідовність має верхню та нижню границі. Крім того, послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ є збіжною

$$\Leftrightarrow \qquad \limsup_{k\to\infty} \alpha_k \;=\; \liminf_{k\to\infty} \alpha_k.$$

Теорема 6.4. *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором і $x_k \rightharpoonup x$. Тоді*

$$\|x\|_L \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_L. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Приклад 6.5. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L = l^2(\mathbf{R})$ і $x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots) \in l^2(\mathbf{R})$ має всі елементи $x_k^i = 0$ за виключенням $x_k^k = 1$, тоді $x_k \rightharpoonup 0$ але $\|x_k\|_{l^2(R)} = 1$.

Таким чином, існують слабко збіжні послідовності $x_k \rightharpoonup x$, для яких

$$\|x\|_L < \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_L. \tag{6.1}$$

В6.6. Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *сильно збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \to x$), якщо

$$\|x_k - x\|_L \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Теорема 6.7. *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором і $x_k \to x$. Тоді*

$$x_k \rightharpoonup x.$$

$\lhd$ Дійсно, для кожного $f \in L^*$ маємо

$$|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x)| \le \|f\|_{L^*}\|x_k - x\|_L \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \qquad \rhd$$

Із цієї теореми відразу ж випливає, що якщо

$$x_k \rightharpoonup x \qquad \text{і} \qquad x_k \to y,$$

тоді $x = y$, оскільки $\|x_k\|_L \to \|y\|_L$ для $x_k \to y$. Проте, із (6.1) випливає, що існують слабко збіжні послідовності $x_k \rightharpoonup x$, які не є сильно збіжними.

Теорема 6.8 (про слабку неперервність операторів). *Нехай $(L, \|\cdot\|_L), (H, \|\cdot\|_H)$ є нормованими просторами, $A \in B(L, H)$ та $x_k \rightharpoonup x$. Тоді*

$$Ax_k \rightharpoonup Ax.$$

$\lhd$ Дійсно, для кожного $\varphi \in H^*$ маємо

$$\varphi(Ax_k) = f(x_k),$$

де $f \in L^*$. Аналогічно $\varphi(Ax) = f(x)$. Враховуючи що $x_k \rightharpoonup x$, отримуємо

$$f(x_k) \to f(x)$$

і тому $\varphi(Ax_k) \to \varphi(Ax)$ для кожного $\varphi \in H^*$, тобто $Ax_k \rightharpoonup Ax$. $\rhd$

Таким чином, обмежені оператори завжди є слабко (та сильно) неперервними.

Теорема 6.9. *Нехай* $(L, \|\cdot\|_L)$ *є нормованим простором і* $x_k \rightharpoonup x$. *Тоді знайдуться* $\alpha_k^l \in \mathbf{C}$ *і* $K_l \in \mathbf{N}$ *при* $k, l \in \mathbf{N}$ такі, що послідовність

$$\tilde{x}_l = \sum_{k=1}^{K_l} \alpha_k^l x_k \to x \qquad \textit{при} \qquad l \to \infty. \qquad \lhd \ \rhd$$

Теорема 6.10. *Нехай* $(L, \|\cdot\|_L)$ *є нормованим простором. Тоді*

$$x_k \rightharpoonup x \qquad \Leftrightarrow$$

$i)$ $\sup\limits_k \|x_k\|_L \le C;$ $ii)$ $f(x_k) \to f(x)$ *для будь-якого* f *із деякої множини лінійних функціоналів, лінійні комбінації яких щільні в* L^*. $\lhd \ \rhd$

Теорема 6.11 (про слабку збіжність у сепарабельному гільбертовому просторі). *Нехай* H *є сепарабельним гільбертовим простором із ортонормованою системою* $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$. *Тоді*

$$x_k \rightharpoonup x \qquad \Leftrightarrow \qquad i) \quad \sup_k \|x_k\|_H \le C; \qquad ii) \quad \langle x_k, e_m \rangle \to \langle x, e_m \rangle \qquad \forall\, m \in \mathbf{N}.$$

$\lhd(\Rightarrow)$ Одразу випливає із визначень та теореми 6.2 $(\Rightarrow)\rhd$

$\lhd(\Leftarrow)$ Нехай $h \in H$ і $\varepsilon > 0$. Тоді знайдуться $l, K \in \mathbf{N}$ і $\phi_m \in \mathbf{C}$ такі, що

$$\left\| h - \sum_{m=1}^{l} \phi_m\, e_m \right\|_H < \varepsilon$$

і $|\langle x_k - x, \sum_{m=1}^{l} \phi_m\, e_m \rangle| < \varepsilon$ для $k \ge K$ завдяки $ii)$. Таким чином, маємо

$$|\langle x_k - x, h \rangle| \le |\langle x_k - x, \sum_{m=1}^{l} \phi_m\, e_m \rangle| + |\langle x_k - x, h - \sum_{m=1}^{l} \phi_m\, e_m \rangle| < \varepsilon\, (1 + 2C),$$

оскільки із $i)$ випливає, що

$$|\langle x_k - x, h - \sum_{m=1}^{l} \phi_m\, e_m \rangle| \le \|\, x_k - x \,\|_H \left\| h - \sum_{m=1}^{l} \phi_m\, e_m \right\|_H < 2C\varepsilon. \qquad (\Leftarrow)\rhd$$

Із цієї теореми відразу ж випливає, що слабка збіжність послідовності $x_k \rightharpoonup x$ еквівалентна сильній збіжності цієї послідовності для скінченновимірного простору L. Дійсно, таке L є еквівалентним простору $\mathbf{C}^n$, який можна розглядати як гільбертовий простір із ортонормованою системою $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ і збіжність із $ii)$ треба перевіряти тільки для скінченної множини індексів m.

Теорема 6.12. *Нехай* H *є гільбертовим простором. Тоді*

$$x_k \to x \qquad \Leftrightarrow \qquad i) \quad x_k \rightharpoonup x; \qquad ii) \quad \|x_k\|_H \to \|x\|_H.$$

$\lhd$ Дійсно, $\|x_k - x\|_H^2 = \langle x_k, x_k \rangle - \langle x, x \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, x_k \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x_k, x \rangle \to 0.$ $\rhd$

Теорема 6.13 (Тихонова А.Н. про слабку компактність кулі). *Нехай* $(L, \|\cdot\|_L)$ *є рефлексивним нормованим простором і послідовність* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ *така, що*

$$\sup_k \|x_k\|_L \leq C \quad \text{для деякого} \quad C \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $x \in L$ *і підпослідовність* $\{x_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ *такі, що*

$$x_l \rightharpoonup x. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Ця теорема означає, що куля $B_c = \{\, x \in L \ : \ \|x\|_L \leq c \,\}$ в рефлексивному лінійному просторі L є слабо компактною.

Теорема 6.14 (про сильну компактність кулі). *Нехай для деякого* $c > 0$ *куля* B_c *є сильно компактною в лінійному нормованому просторі* $(L, \|\cdot\|_L)$. *Тоді*

$$\dim L < \infty. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Теорема 6.15 (Релліха-Кондрашова про компактність для 1-періодичних функцій). *Нехай* $r, s \in \mathbf{R}$, $r < s$ *і послідовність* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^s_{pe*}((0,1)^n)$ *така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_{*s} \leq C \quad \text{для деякого} \quad C \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $v \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ *і підпослідовність* $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такі, що*

$$v_l \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad H^s_{pe*}((0,1)^n),$$

$$v_l \to v \quad \text{в} \quad H^r_{pe*}((0,1)^n).$$

$\triangleleft$ Твердження про існування $v \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ і слабко збіжної підпослідовності випливає із теореми Тихонова. Для $\varepsilon > 0$ і $v_l = \sum\limits_m \alpha^l_m \, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ маємо

$$\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{*r} =$$

$$= \sum_{m \neq 0,\ |m| < M} |m|^{2r-2s} |m|^{2s} |\alpha^{l_1}_m - \alpha^{l_2}_m|^2 + \sum_{|m| \geq M} |m|^{2r-2s} |m|^{2s} |\alpha^{l_1}_m - \alpha^{l_2}_m|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{m \neq 0,\ |m| < M} |m|^{2s} |\alpha^{l_1}_m - \alpha^{l_2}_m|^2 + |M|^{2r-2s} \sum_{|m| \geq M} |m|^{2s} \left(|\alpha^{l_1}_m|^2 + 2|\alpha^{l_1}_m||\alpha^{l_2}_m| + |\alpha^{l_2}_m|^2 \right) \leq$$

$$\leq \sum_{m \neq 0,\ |m| < M} |m|^{2s} |\alpha^{l_1}_m - \alpha^{l_2}_m|^2 + 4C|M|^{2r-2s} < \sum_{m \neq 0,\ |m| < M_0} |m|^{2s} |\alpha^{l_1}_m - \alpha^{l_2}_m|^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

для достатньо великого M_0. Фіксуємо таке M_0. Слабка збіжність послідовності еквівалентна сильній збіжності цієї послідовності в $H^s_{pe*}((0,1)^n)$-нормі для скінченновимірного простору тригонометричних поліномів із $m \neq 0$ і $|m| < M_0$. Таким чином, знайдеться J таке, що

$$\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{*r} < \sum_{m\neq 0,\ |m|<M_0} |m|^{2s} |\alpha^{l_1}_m - \alpha^{l_2}_m|^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при $l_1, l_2 \geq J$, тобто послідовність $\{v_l\}_{l=1}^\infty$ є фундаментальною і тому $v_l \to v$, оскільки $H^r_{pe*}((0,1)^n)$ є повним. $\triangleright$

Теорема про компактність для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється таким чином.

Теорема 6.16 (Релліха-Кондрашова про компактність). *Нехай* $C > 0$ *і послідовність* $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1(\Omega)$ *така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Тоді існують $v \in H^1(\Omega)$ *і підпослідовність* $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset \{v_k\}_{k=1}^\infty$ *такі, що*

$$v_l \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad H^1(\Omega),$$

$$v_l \to v \quad \text{в} \quad L^2(\Omega). \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Ця теорема для послідовності $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1_0(\Omega)$ випливає із теореми 6.15. Дійсно, продовжуючи нулем елементи цієї послідовності зовні Ω, можна вважати, що $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1_{per}((0,1)^n)$ і $\sup_k \|v_k\|_{H^1_{per}((0,1)^n)} \leq C$ для відповідного C. У загальному випадку, цю теорему також можна вивести із теореми 6.15, проте процес продовження зовні Ω елементів відповідної послідовності $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1(\Omega)$ (такої, що $\sup_k \|v_k\|_{H^1_{per}((0,1)^n)} \leq C$) є складнішим.

Вже було доведено наступне твердження (Теорема 5.19).

Теорема 6.17 (Соболєва про вкладення для 1-періодичних функцій). *Нехай*

$$s > \frac{n}{2}\,.$$

Тоді маємо неперервне вкладення $H^s_{per}((0,1)^n) \subset C^0([0,1]^n)$. $\triangleleft\ \triangleright$

Насправді, вкладення $H^s_{per}((0,1)^n) \subset C^0([0,1]^n)$ в теоремі Соболєва є не тільки неперервним, але і компактним в наступному сенсі.

Теорема 6.18 (Соболєва про компактність для 1-періодичних функцій). *Нехай* $s > \frac{n}{2}$, $C > 0$ *і послідовність* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^s_{per}((0,1)^n)$ *така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_s \le C.$$

Тоді існують $v \in H^s_{per}((0,1)^n)$ *і підпослідовність* $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такі, що*

$$v_l \rightharpoonup v \quad \textit{в} \quad H^s_{per}((0,1)^n),$$

$$v_l \to v \quad \textit{в} \quad C^0([0,1]^n).$$

◁ Можна знайти $r \in \mathbf{R}$ таке, що $s > r > \frac{n}{2}$ і вважати, що $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^s_{pe*}((0,1)^n)$, оскільки підпростір констант є одновимірним. Тому, твердження про існування $v \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ і сильно збіжної підпослідовності $v_l \to v$ в $H^r_{pe*}((0,1)^n)$ випливає із теореми 6.15. Крім того, із теореми 6.17 маємо

$$\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{C^0([0,1]^n)} \le C\,\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{H^r_{pe*}((0,1)^n)}$$

для деякого $C > 0$. Тому існує єдине $\tilde{v} \in C^0([0,1]^n)$ таке, що $\|\tilde{v} - v_l\|_{C^0([0,1]^n)} \to 0$, оскільки $(C^0([0,1]^n), \|\cdot\|_{C^0([0,1]^n)})$ є повним. Крім того, функція $\tilde{v} \in C^0([0,1]^n)$ є представником класу $v \in H^s_{per}((0,1)^n)$, оскільки цей клас однозначно визначається коефіцієнтами $\{\alpha_m\}_{m \in Z^n_*}$ у відповідності із теоремою 5.6. ▷

Теорема про компактність для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється таким чином.

Теорема 6.19 (Соболєва про компактність). *Нехай* $1 \le p < \infty$, *ціле* m *таке, що* $m > \frac{n}{p}$ *і послідовність* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W^{m,p}(\Omega)$ *така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le C \quad \textit{для деякого} \quad C \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $v \in W^{m,p}(\Omega)$ *і підпослідовність* $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такі, що*

$$v_l \rightharpoonup v \quad \textit{в} \quad W^{m,p}(\Omega),$$

$$v_l \to v \quad \textit{в} \quad C^0(\overline{\Omega}). \qquad \lhd \ \rhd$$

Твердження цієї теореми для $p = 2$ та $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W^{m,2}_0(\Omega) = H^m_0(\Omega)$ випливають із теореми 6.18. У загальному випадку, доведення теореми 6.19 є складнішим, оскільки теорія рядів Фур'є в $L^p((0,1)^n)$ є набагато складнішою при $p \ne 2$.

Теорема 6.20 (про компактність сліду для 1-періодичних функцій). *Припустимо, що ціле* d *і дійсні* s, r *задовольняють нерівностям* $1 \leq d < n$ та

$$s > r > \frac{d}{2}.$$

Нехай $\sigma \in [0,1]^n$, $C > 0$ *і послідовність* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^s_{per}((0,1)^n)$ *така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_s \leq C.$$

Тоді існують $v \in H^s_{per}((0,1)^n)$ *і підпослідовність* $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такі, що*

$$v_l\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d} \rightharpoonup v\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d} \quad \text{в} \quad H^{s-d/2}_{per}((0,1)^{n-d}),$$

$$v_l\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d} \to v\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d} \quad \text{в} \quad H^{r-d/2}_{per}((0,1)^{n-d}).$$

$\lhd$ Можна вважати, що $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^s_{pe*}((0,1)^n)$. Тому твердження про існування $v \in H^s_{pe*}((0,1)^n)$ і сильно збіжної підпослідовності $v_l \to v$ в $H^r_{pe*}((0,1)^n)$ випливає із теореми 6.15. Крім того, із теореми 5.21 маємо

$$v_l\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d} \rightharpoonup v\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d} \quad \text{в} \quad H^{s-d/2}_{per}((0,1)^{n-d}),$$

оскільки оператор сліду є (слабко) неперервним та

$$\|v_{l_1}\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d} - v_{l_2}\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d}\|_{H^{r-d/2}_{pe*}((0,1)^{n-d})} \leq C\,\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{H^r_{pe*}((0,1)^n)}$$

для деякого $C > 0$. Таким чином, послідовність $\{v_l\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d}\}_{l=1}^{\infty}$ є фундаментальною і тому $v_l\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d} \to v\big|_{x_1=\sigma_1,\ldots,x_d=\sigma_d}$ в $H^{r-d/2}_{per}((0,1)^{n-d})$. $\rhd$

Розглянемо гільбертовий простір $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ над $\mathbf{R}$. Відображення

$$a\,:\,H \times H \to \mathbf{R}, \qquad u, v \mapsto a(u,v)$$

називається *білінійною формою* на H, якщо $a(u,v)$ неперервна і лінійна по кожному із аргументів. Білінійна форма *симетрична*, якщо

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall\, u, v \in H.$$

Кожен лінійний неперервний оператор $A : H \to H^*$ визначає білінійну форму

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle \qquad \forall\, u, v \in H. \tag{6.2}$$

Дійсно, білінійність $a(u,v)$ випливає із лінійності A і білінійності $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а неперервність із нерівності

$$|\,a(u,v)\,| = |\langle Au, v\rangle| \le \|Au\|_{H^*}\|v\|_H \le \|A\|_{B(H,H^*)}\|u\|_H\|v\|_H.$$

З іншого боку, якщо задана білінійна форма $a(u,v)$ на H, тоді для кожного $u \in H$ відображення

$$v \mapsto a(u,v) \qquad \text{для} \quad v \in H$$

визначає лінійний неперервний функціонал на H. Тому існує лінійний оператор $A : H \to H^*$ такий, що виконана рівність (6.2).

Теорема 6.21. *Нехай* $a(u,v)$ *є білінійною формою на* H *і* $u_m \rightharpoonup u$. *Тоді*

$$a(u_m, v) \to a(u,v) \qquad \forall v \in H.$$

$\lhd$ Фіксуємо $v \in H$ і розглянемо $f_v(u) = a(u,v)$. Із визначень маємо $f_v \in H^*$ і

$$f_v(u_m) = a(u_m, v) \to f_v(u) = a(u,v) \qquad \forall v \in H. \qquad \rhd$$

Теорема 6.22. *Нехай* $b(u,v)$ *є білінійною формою на* H, $v_m \to v$ *і* $u_m \rightharpoonup u$ *в* H. *Тоді*

$$b(v_m, u_m) \to b(v,u).$$

$\lhd$ Існує $B \in B(H,H^*)$ такий, що $b(v,u) = \langle Bv, u\rangle$ для $v, u \in H$ і тому

$$|b(v_m - v, u_m)| = |\langle B(v_m - v), u_m\rangle| \le \|B\|_{B(H,H^*)}\|v_m - v\|_H\|u_m\|_H \to 0,$$

оскільки $\|u_m\|_H \le C$ для деякої сталої C. Отже, згідно з теоремою 6.21 маємо

$$b(v_m, u_m) = b(v_m - v, u_m) + b(v, u_m) \to b(v,u). \qquad \rhd$$

B6.23. Білінійна форма $a(u,v)$ називається *коерцитивною* на H, якщо

$$\exists\, \alpha > 0 : \qquad a(v,v) \ge \alpha\,\|v\|_H^2 \qquad \forall\, v \in H.$$

Із визначень випливає, що білінійна коерцитивна симетрична форма $a(u,v)$ визначає норму $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$ на H, яка еквівалентна нормі $\|v\|_H$.

Теорема 6.24 ($\exists 1$ розв'язку варіаційної рівності у гільбертовому просторі). *Нехай* H *є сепарабельним гільбертовим простором над* $\mathbf{R}$, $a(u,v)$ *є білінійною коерцитивною формою і* $f \in H^*$. *Тоді* $\exists 1 \; u \in H$:

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall\, v \in H. \tag{6.3}$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ *є ліпшицевим, тобто, якщо* $u, \tilde{u} \in H$ *є розв'язками задачі* (6.3), *яки відповідні* $f, \tilde{f} \in H^*$, *тоді*

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha)\|f - \tilde{f}\|_{H^*}. \tag{6.4}$$

$\lhd$ Доведемо спочатку нерівність (6.4). Нехай $u, \tilde{u} \in H$ є розв'язками задачі (6.3), яки відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тобто

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall\, v \in H,$$

$$-\, a(\tilde{u}, \tilde{v}) = -\, \langle \tilde{f}, \tilde{v} \rangle \qquad \forall\, \tilde{v} \in H.$$

Вибираючи $v = u - \tilde{u}$ у першому рівнянні, $\tilde{v} = u - \tilde{u}$ у другому рівнянні і складаючи ці рівняння, отримуємо

$$a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle.$$

Враховуючи умову коерцитивності, маємо

$$\alpha\, \|u - \tilde{u}\|_H^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^*} \|u - \tilde{u}\|_H.$$

Звідки випливає (6.4) та єдиність розв'язку (6.3) (якщо цей розв'язок існує).

Гільбертовий простір H є сепарабельним. Тому існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ такі, що простір

$$\widetilde{H} = \{\, v \in H \,:\, v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i, \quad \forall\, \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall\, m \in \mathbf{N} \,\}$$

є щільним в H.

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний лінійний простір

$$H_m = \{\, v \in H \,:\, v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \,\}.$$

Розглянемо наступну задачу : знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m w_i \in H_m$ таке, що

$$a(u_m, v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H_m.$$

Ця задача еквівалентна системі m рівнянь

$$a(u_m, w_j) = \langle f, w_j\rangle, \qquad j = 1, \dots, m,$$

для m компонент α_i^m вектора $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m w_i$, тобто

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^m a(w_i, w_j) = \langle f, w_j\rangle, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{6.5}$$

Припустимо, що існують $\beta_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots n$ такі, що

$$\sum_{i=1}^m \beta_i a(w_i, w_j) = 0, \qquad j = 1, \dots, m,$$

тоді

$$\sum_{i,j=1}^m \beta_i a(w_i, w_j)\beta_j = 0,$$

тобто

$$a(\sum_{i=1}^m \beta_i w_i, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j) = 0.$$

Таким чином, $\sum_{i=1}^m \beta_i w_i = 0$ і тому $\beta_i = 0$, $i = 1, \dots m$, оскільки w_i, $i = 1, \dots m$ лінійно незалежні.

Отже, система рівнянь (6.5) має розв'язок і $\exists 1\ u_m \in H_m$:

$$a(u_m, v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H_m.$$

Крім того, вибираючи $v = u_m$, отримуємо

$$\alpha \|u_m\|_H^2 \le a(u_m, u_m) = \langle f, u_m\rangle \le \|f\|_{H^*}\|u_m\|_H,$$

тобто

$$\|u_m\|_H \le (1/\alpha)\|f\|_{H^*} \le M.$$

Тому існують $u \in H$ і $\{u_{\widetilde{m}}\}_{\widetilde{m}=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$ (теореми Тихонова і 6.21) такі, що

$$a(u_{\widetilde{m}}, v) \to a(u, v) \qquad \forall v \in H_m \subset H,$$

тобто

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H_m, \quad \forall\, m,$$

де використана щільність $\widetilde{H}$ в H і теорема 6.22. $\triangleright$

Теорема 6.25 (про еквівалентність варіаційної рівності і задачі мінімізації). *Нехай* H *є гільбертовим простором над* $\mathbf{R}$, $a(u,v)$ *є білінійною симетричною коерцитивною формою і* $f \in H^*$. *Тоді задача:*

$$\textit{знайти} \quad u \in H \; : \qquad a(u,v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall\, v \in H \tag{6.3}$$

еквівалентна наступній задачі мінімізації:

$$\textit{знайти} \quad u \in H \; : \qquad E(v) \geq E(u) \qquad \forall\, v \in H, \tag{6.6}$$

де

$$E(v) = \|v\|_a^2 - 2\,\langle f, v\rangle = a(v,v) - 2\,\langle f, v\rangle.$$

$\lhd\,(\Rightarrow)$ Нехай $u \in H$ є розв'язком задачі (6.3). Тоді $\|u - v\|_a^2 \geq 0 \quad \forall\, v \in H$ та

$$\|u\|_a^2 + \|v\|_a^2 - 2\,a(u,v) \geq 0,$$

тобто

$$a(v,v) - 2\,\langle f, v\rangle \geq -\|u\|_a^2.$$

Звідки витікає (6.6), оскільки $-\|u\|_a^2 = a(u,u) - 2\,\langle f, u\rangle$ в силу (6.3). $\quad (\Rightarrow)\rhd$

$\lhd\,(\Leftarrow)$ Нехай $u \in H$ є розв'язом задачі (6.6). Тоді для $\alpha \geq 0$ і $v \in H$ маємо

$$E(u + \alpha\, v) \geq E(u),$$

тобто $\alpha = 0$ реалізує мінімум функції $\Psi(\alpha) = E(u + \alpha\, v)$. Отже,

$$\left.\frac{d\Psi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \geq 0,$$

де, наприклад,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{a(u + \alpha\, v, u + \alpha\, v) - a(u,u)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{a(u + \alpha\, v, u + \alpha\, v) - a(u + \alpha\, v, u) + a(u + \alpha\, v, u) - a(u,u)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{a(u + \alpha\, v, \alpha\, v) + a(u, \alpha\, v)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} a(u + \alpha\, v, v) + a(u,v) = 2\,a(u,v).$$

Таким чином,

$$2\,a(u,v) \geq 2\,\langle f, v\rangle.$$

Аналогічно, розглядаючи функцію $\widetilde{\Psi}(\alpha) = E(u - \alpha\, v)$, робимо висновок, що

$$2\, a(u,v) \le 2\,\langle f, v\rangle. \qquad (\Leftarrow) \triangleright$$

Для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ множина 1-періодичних комплекснозначних "функцій"

$$H^s_{pe*}((0,1)^n) = \{\, u = \sum_{m\in Z^n_*} \alpha_m\, e^{(x,\,m)\,2\pi\, i} \;:\quad \sum_{m\in Z^n_*} |m|^{2s}|\alpha_m|^2 < \infty\,\}$$

є сепарабельним гільбертовим простором із скалярним добутком

$$\langle h, l\rangle_{H^s_{per}((0,1)^n)} = \sum_{m\in Z^n_*} |m|^{2s}\alpha_m\overline{\beta}_m \;=\; (2\pi)^{-2s}\int\limits_{(0,1)^n} ((-\Delta)^{s/2}h)((-\Delta)^{s/2}l)\, dx$$

для $h(x) = \sum\limits_{m\in Z^n_*} \alpha_m e^{(x,\,m)\,2\pi\, i}$ і $l(x) = \sum\limits_{m\in Z^n_*} \beta_m e^{(x,\,m)\,2\pi\, i}$. Підпростір 1-періодичних дійснозначних функцій в цьому просторі визначається рівністю

$$H^s_{pR*}((0,1)^n) = \{\, u = \sum_{m\in Z^n_*} \alpha_m\, e^{(x,\,m)\,2\pi\, i} \in H^s_{pe*}((0,1)^n) \;:\; \alpha_m = \overline{\alpha}_{-m} \quad \forall\, m \in Z^n_*\},$$

оскільки із рівності $u = \overline{u}$ випливає, що

$$u = \sum_{m\in Z^n_*} \alpha_m\, e^{(x,\,m)\,2\pi\, i} = \sum_{m\in Z^n_*} \overline{\alpha}_m\, e^{-(x,\,m)\,2\pi\, i} = \sum_{m\in Z^n_*} \overline{\alpha}_{-m}\, e^{(x,\,m)\,2\pi\, i} = \overline{u}.$$

Підпростір $H^s_{pR*}((0,1)^n)$ є повним, оскільки співпадає із множиною нулів лінійного обмеженого оператору $Au = u - \overline{u}$, що діє із $H^s_{pe*}((0,1)^n)$ в $H^s_{pe*}((0,1)^n)$.

Приклад 6.26 (1-періодична задача для рівняння Пуассона). Розглянемо гільбертів простір $H = H^1_{pR*}((0,1)^n)$. Тоді

$$a(u,v) = \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u, \nabla v)\, d\, x = \int\limits_{(0,1)^n} ((-\Delta)\, u)\, v\, dx = \int\limits_{(0,1)^n} ((-\Delta)^{1/2}u)((-\Delta)^{1/2}v)\, dx$$

є білінійною симетричною коерцитивною формою на $H^1_{pR*}((0,1)^n)$.

Таким чином, для $f \in H^{-1}_{pR*}((0,1)^n)$ задача мінімізації:

$$\text{знайти} \quad u \in H^1_{pR*}((0,1)^n) \;: \qquad E(v) \ge E(u) \qquad \forall\, v \in H^1_{pR*}((0,1)^n),$$

де $E(v) = \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla v, \nabla v)\, d\, x - 2 \int\limits_{(0,1)^n} f\, v\, d\, x$, еквівалентна 1-періодичній задачі для рівняння Пуассона

$$-\,\Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}_{pR*}((0,1)^n).$$

Приклад 6.27 (1-періодична задача для дивергентного рівняння). Розглянемо гільбертів простір $H = H^1_{pR*}((0,1)^n)$ і симетричну матрицю $A(x) \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^{n\times n}$ таку, що $\alpha I \le A(x) \le \beta$ для м.в. $x \in [0,1]^n$ і деяких додатних α, β. Тоді

$$a(u,v) = \int\limits_{(0,1)^n} (A(x)\nabla u(x), \nabla v(x))\, d\,x$$

є білінійною симетричною коерцитивною формою на $H^1_{pR*}((0,1)^n)$.

Таким чином, для $f \in H^{-1}_{pR*}((0,1)^n)$ задача (6.3) еквівалентна 1-періодичної задачі Діріхле для дивергентного рівняння

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{в} \quad H^{-1}_{pR*}((0,1)^n).$$

Приклад 6.28 (задача Діріхле для рівняння із перенесенням). Нехай Ω є областю, $H = H^1_0(\Omega)$ і вектор $B(x) \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^n$ такий, що $\operatorname{div} B(x) = 0$. Тоді

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\, d\,x + \int\limits_\Omega (B(x)\cdot\nabla u(x))\, v(x)\, d\,x$$

є білінійною коерцитивною формою на $H^1_0(\Omega)$, де

$$B(x)\cdot\nabla u(x) = B_1(x)\,\frac{\partial\, u(x)}{\partial x_1} + \ldots + B_n(x)\,\frac{\partial\, u(x)}{\partial x_n}.$$

◁ Перевіримо коерцитивність $a(u,v)$. Маємо

$$\int\limits_\Omega (B(x)\cdot\nabla v(x))\, v(x)\, d\,x = \int\limits_\Omega (B(x)\, v(x), \nabla v(x))\, d\,x =$$

$$= -\int\limits_\Omega (\operatorname{div}(B(x)\, v(x)) v(x)\, d\,x = -\int\limits_\Omega (B(x)\cdot\nabla v(x))\, v(x)\, d\,x,$$

оскільки $\operatorname{div}(B(x)\, v(x)) = \operatorname{div}(B(x))\, v(x) + B(x)\cdot\nabla v(x)$, тобто

$$a(v,v) = \int\limits_\Omega (\nabla v(x), \nabla v(x))\, d\,x. \qquad ▷$$

Таким чином, для $f \in H^{-1}(\Omega)$ задача (6.3) еквівалентна задачі Діріхле для рівняння із перенесенням

$$-\Delta u + B(x)\cdot\nabla u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega).$$

Аналогічно можна вивчити 1-періодичну задачу для рівняння із перенесенням та задачу Діріхле для дивергентного рівняння і рівняння Пуассона.

7. Основні стаціонарні і нестаціонарні (еволюційні) задачі

Задача Діріхле для рівняння Пуассона: знайти $u = u(x)$:

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

де $f(x)$ – задана функція на Ω і $\varphi(x)$ – задана функція на $\partial\Omega$.

Задача Діріхле для *загального дивергентного* рівняння: знайти $u = u(x)$:

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + B(x)\cdot\nabla u + \operatorname{div}(b(x)\,u) + c(x)\,u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

де $A(x) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – задана матриця-функція на Ω, $B(x), b(x)$ – задані вектор-функції на Ω, $c(x)$, $f(x)$ – задані функції на Ω і $\varphi(x)$ – задана функція на $\partial\Omega$. У координатному записі це рівняння має вигляд

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\,(b_i(x)\,u) + c(x)\,u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $B(x) = (B_1(x), \ldots, B_n(x))$ і $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$.

Початково-краєва задача (Коші-Діріхле) для *рівняння теплопровідності*: знайти $u = u(x,t)$:

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – задана функція на $\Omega\times(0,T)$, $\varphi(x,t)$ – задана функція на $\partial\Omega\times(0,T)$ і $u_0(x)$ – задана функція на Ω. Якщо в цій задачі замінити оператор Лапласа на загальний дивергентний оператор, тоді отримаємо початково-краєву задачу для рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка.

Початково-краєва задача для *рівняння Шредінгера*: знайти $u = u(x,t)$:

$$i\,u'_t - \Delta u + c(x)\,u = f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – задана функція на $\Omega\times(0,T)$, $\varphi(x,t)$ – задана функція на $\partial\Omega\times(0,T)$, $c(x)$ і $u_0(x)$ – задані функції на Ω.

Початково-краєва задача для *хвильового рівняння*: знайти $u = u(x,t)$:

$$u''_{tt} - \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – задана функція на $\Omega\times(0,T)$, $\varphi(x,t)$ – задана функція на $\partial\Omega\times(0,T)$, $u_0(x)$ і $u_1(x)$ – задані функції на Ω.

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Ламе* (теорії пружності) : знайти $u = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t))$:

$$u''_{tt} - \mu\,\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u) = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – задана вектор-функція на $\Omega\times(0,T)$, $\varphi(x,t)$ – задана вектор-функція на $\partial\Omega\times(0,T)$, $u_0(x)$ і $u_1(x)$ – задані вектор-функції на Ω. Ця задача для неоднорідних матеріалів має такий вигляд:

$$u''_{tt} - \operatorname{div}(\,\mu(x)\nabla u) + \nabla((\mu(x)+\lambda(x))\operatorname{div} u) = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $\mu(x), \lambda(x)$ – задані функції на Ω.

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Максвела*: знайти

$E = (E_1(x,t),\ldots,E_n(x,t)), B = (B_1(x,t),\ldots,B_n(x,t))$:

$$E'_t - \operatorname{rot} B = F \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$B'_t + \operatorname{rot} E = G \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$[B,\nu] = \varphi_b, \qquad (E,\nu) = \varphi_e \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$E|_{t=0} = E_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B|_{t=0} = B_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $F(x,t), G(x,t)$ – задані вектор-функції на $\Omega\times(0,T)$, $\varphi_b(x,t)$ – задана вектор-функція на $\partial\Omega\times(0,T)$, $\varphi_e(x,t)$ – задана функція на $\partial\Omega\times(0,T)$, $E_0(x), B_0(x)$ – задані вектор-функції на Ω, $[\cdot,\nu]$ і $(\cdot,\nu)$ позначають векторний і скалярний добуток вектор-функції на зовнішню нормаль ν до межі $\partial\Omega$ і, наприклад, для $n=3$ оператор ротора визначається рівністю

$$\operatorname{rot} E \;=\; (\,\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2,\, \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3,\, \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1\,)\,.$$

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Нав'є-Стокса* (в'язкої нестискуваної рідини): знайти $(u,p) = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t),p(x,t))$:

$$u'_t \,-\, \mu\,\Delta u \,+\, u\cdot\nabla\, u \,+\, \nabla\, p = f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – задана вектор-функція на $\Omega\times(0,T)$, $u_0(x)$ – задана вектор-функція на Ω і параметр μ називається *коефіцієнтом в'язкості*. Наприклад, для $n=3$ у координатному записі рівняння Нав'є-Стокса мають вигляд

$$(u_1)'_t \,-\, \mu\,\Delta u_1 \,+\, u_1\partial_1 u_1 \,+\, u_2\partial_2 u_1 \,+\, u_3\partial_3 u_1 \,+\, \partial_1 p = f_1 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$(u_2)'_t \,-\, \mu\,\Delta u_2 \,+\, u_1\partial_1 u_2 \,+\, u_2\partial_2 u_2 \,+\, u_3\partial_3 u_2 \,+\, \partial_2 p = f_2 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$(u_3)'_t \,-\, \mu\,\Delta u_3 \,+\, u_1\partial_1 u_3 \,+\, u_2\partial_2 u_3 \,+\, u_3\partial_3 u_3 \,+\, \partial_3 p = f_3 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$\partial_1 u_1 \,+\, \partial_2 u_2 \,+\, \partial_3 u_3 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T).$$

Коли коефіцієнт в'язкості дорівнює нулю (або є "дуже маленьким"), тоді розглядається початково-краєва задача для *рівнянь Ейлера* (ідеальної нестискуваної рідини): знайти $(u,p) = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t),p(x,t))$:

$$u'_t \,+\, u\cdot\nabla\, u \,+\, \nabla\, p = f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$(u,\nu) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ та $u_0(x)$ – задані вектор-функції на $\Omega\times(0,T)$ та Ω.

Рівняння гідродинаміки (газодинаміки - нев'язкої нестискуваної рідини) : знайти $(\varrho, u, E) = (\varrho(x,t), u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t), E(x,t))$:

$$\varrho'_t + \operatorname{div}(\varrho\, u) = 0,$$

$$(\varrho\, u)'_t + \operatorname{div}(\varrho\, u \otimes u) + \nabla p = f,$$

$$(\varrho\, E)'_t + \operatorname{div}(\varrho\, E\, u) + \operatorname{div}(p\, u) = 0,$$

де $p = p(\varrho, E)$ визначає *рівняння стану* (рідини або газу) і $u \otimes u = \{ u_i u_j \}_{i,j=1}^n$.

Розглянемо для $n = 1$ і $\Omega = \mathbf{R}$ початково-краєву задачу для хвильового рівняння: знайти $u = u(x,t)$:

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \infty),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $u_0(x), u_1(x)$ задані функції на Ω і постійна a визначає "швидкість" розповсюдження хвиль.

Розв'язок цієї задачі представляється такою формулою Даламбера

$$u(x,t) = \frac{u_0(\,x + a\,t) + u_0(\,x - a\,t)}{2} + \frac{1}{2\,a} \int\limits_{x-a\,t}^{x+a\,t} u_1(\tau)\, d\,\tau.$$

Цю формулу можна переписати у вигляді

$$u(x,t) = \frac{u_0(\,x + a\,t) + u_0(\,x - a\,t)}{2} + \frac{U(\,x + a\,t) - U(\,x - a\,t)}{2\,a},$$

де $U'_x = u_1(x)$. Зокрема, при $u_1 = 0$ ці формули моделюють розповсюдження двох хвиль: $(1/2)u_0(\,x + a\,t)$ і $(1/2)u_0(\,x - a\,t)$, що мають швидкості a та $-a$.

Нехай фіксовані банаховий простір B і число $T > 0$. Розглянемо множину неперервних відображень

$$v \,:\, [0, T] \to B.$$

Ця множина позначається через $C^0([0,T]; B)$ і є лінійним нормованим простором із нормою

$$\|v\|_{C^0([0,T];B)} = \max_{0 \le t \le T} \|\, v(t)\,\|_B.$$

На просторі $C^0([0,T];B)$ можна також задати норми

$$\|v\|_{L^p((0,T);B)} = \left(\int\limits_0^T \| v(\tau) \|_B^p \, d\tau \right)^{1/p} \qquad \text{при} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|v\|_{L^\infty((0,T);B)} = \lim_{p\to\infty} \|v\|_{L^p((0,T);B)} \qquad \text{для} \qquad v \in C^0([0,T];B).$$

Визначимо банаховий простір $L^p((0,T);B)$ як поповнення $C^0([0,T];B)$ по відповідній нормі та позначимо

$$\widetilde{L}^\infty((0,T);B) = \{ v \in L^1((0,T);B) \, : \, \|v\|_{L^\infty((0,T);B)} < \infty \}.$$

Нехай Ω є областю в $\mathbf{R}^n$. Розглянемо початково-краєву задачу для рівняння теплопровідності: знайти $u = u(x,t)$:

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{7.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Помножимо скалярно перше рівняння в (7.1) на функцію $v \in C_0^\infty(\Omega)$, проінтегруємо отриману рівність по Ω та частинами. Тоді

$$\int\limits_\Omega u'_t \, v \, dx + \int\limits_\Omega (\nabla u \, , \nabla v) \, dx = \int\limits_\Omega f \, v \, dx. \tag{7.2}$$

Слабким розв'язком задачі (7.1) називається елемент

$$u \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$$

такий, що $u'_t \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$, $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$ і виконана інтегральна тотожність (7.2) для будь-якої функції $v \in C_0^\infty(\Omega)$ і майже всіх $t \in (0,T)$.

Теорема 7.1 (Ліонса про вкладення). *Нехай фіксовано* $u \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ *і* $u'_t \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$. *Тоді* $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ *та*

$$\left(\int\limits_\Omega u^2 \, dx \right)'_t = 2 \int\limits_\Omega u'_t \, u \, dx. \qquad \triangleleft \; \triangleright$$

Теорема 7.2 (про існування слабкого розв'язку початково-краєвої задачі для рівняння теплопровідності). *Нехай* $f \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$ *і* $u_0 \in L^2(\Omega)$. *Тоді існує єдиний слабкий розв'язок* $u \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ *задачі (7.1),*

$$u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

і для майже всіх $t \in (0,T)$ *виконана енергетична рівність*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{u^2}{2}\, dx \;+ \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\, d\tau \;= \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} f\, u\, dx\, d\tau \;+ \int\limits_{\Omega} \frac{u_0^2}{2}\, dx\,.$$

$\lhd$ Простір $H_0^1(\Omega)$ є сепарабельним. Тому знайдуться лінійно незалежні елементи $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ такі, що множина

$$\widetilde{H} = \{\, v \in H_0^1(\Omega) \,:\, v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i\,, \quad \forall\, \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall\, m \in \mathbf{N}\,\}$$

є щільною в $H_0^1(\Omega)$.

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний простір

$$H_m = \{\, v \in H_0^1(\Omega) \,:\, v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i\,, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}\,\}\,.$$

Розглянемо наступну задачу: знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) w_i$ таке, що

$$\int\limits_{\Omega} u_m'\, w_j\, dx + \int\limits_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla w_j)\, dx \;= \int\limits_{\Omega} f(t)\, w_j\, dx, \qquad t \in (0,T), \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{7.3}$$

$$u_m|_{t=0} = \mathrm{Pr}_{V_m}(u_0).$$

Це задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\alpha_{1m}(t), \ldots, \alpha_{mm}(t)$:

$$\sum_{i=1}^m \left(\int\limits_{\Omega} w_i\, w_j\, dx \right) \alpha_{im}'(t) + \sum_{i=1}^m \left(\int\limits_{\Omega} (\nabla w_i, \nabla w_j)\, dx \right) \alpha_{im}(t) \;= \int\limits_{\Omega} f(t)\, w_j\, dx$$

$$t \in (0,T), \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad u_m|_{t=0} = \mathrm{Pr}_{V_m}(u_0).$$

Така задача має єдиний розв'язок, оскільки матриця $\int\limits_{\Omega} w_i w_j\, dx$ має обернену (§ 6). Помножимо рівняння задачі на $\alpha_{jm}(t)$ і підсумуємо по $j = 1, \ldots, m$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} u_m'(t)\, u_m(t)\, dx \;+ \int\limits_{\Omega} (\nabla u_m(t)\,, \nabla u_m(t))\, dx \;= \int\limits_{\Omega} f(t)\, u_m(t)\, dx.$$

Із цієї рівності випливає, що

$$\left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \right)_t' + 2\, \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} = 2 \int\limits_{\Omega} f(t)\, u_m(t)\, dx \;\le$$

$$\le\; 2\, \|f(t)\|_{L^2(\Omega)^n} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + C\, \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Інтегруючи цю нерівність по $t \in (0, s)$, маємо

$$\|u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int\limits_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\, dt \le$$

$$\le \|\mathrm{Pr}_{V_m}(u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C \int\limits_0^s \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt.$$

Таким чином, для деякої постійної $M > 0$ виконані нерівності

$$\|u_m\|_{\widetilde{L}^\infty((0,T);L^2(\Omega))} + \|\nabla u_m\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega)^n)} \le M$$

і існують $u \in \widetilde{L}^\infty((0,T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$ і підпослідовність

$$u_{\widetilde{m}} \in \widetilde{L}^\infty((0,T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$$

такі, що

$$u_{\widetilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2((0,T); H^1_0(\Omega)), \tag{7.4}$$
$$u_{\widetilde{m}} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad \widetilde{L}^\infty((0,T); L^2(\Omega)).$$

Помножимо рівняння (7.3) на функцію $\varphi \in C^1[0,T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0,T]$ та частинами. Тоді

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_m(t)\varphi'(t)w_j\, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla u_m(t), \varphi(t)\nabla w_j)\, dxdt = \tag{7.5}$$

$$= \int\limits_\Omega u_m(0)\varphi(0)w_j\, dx + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(t)\, \varphi(t) w_j\, dxdt.$$

Співвідношень (7.4) достатньо, щоб перейти до границі в (7.5) і отримати, що

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u(t)\varphi'(t)v\, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v)\, dxdt = \tag{7.6}$$

$$= \int\limits_\Omega u_0\varphi(0)v\, dx + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(t)\varphi(t)v\, dxdt$$

для будь-якого $v \in \widetilde{H}$ і тому для будь-якого $v \in H^1_0(\Omega)$.

Із (7.6) при $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ випливає, що виконана інтегральна тотожність (7.2).

Помножимо тотожність (7.2) на функцію $\varphi \in C^1[0,T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0,T]$ та частинами. Тоді

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u(t)\varphi'(t)v\, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v)\, dxdt = \tag{7.7}$$

$$= \int\limits_{\Omega} u|_{t=0}\varphi(0)v\,dx + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f(t)\varphi(t)v\,dxdt,$$

для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$. Порівнюючи (7.6) і (7.7) при $\varphi(0) = 1$, отримуємо

$$\int\limits_{\Omega} u|_{t=0}\,v\,dx = \int\limits_{\Omega} u_0\,v\,dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Отже, виконана рівність $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$. Крім того, із (7.2) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} u_t'\,v\,dx = \int\limits_{\Omega} f\,v\,dx - \int\limits_{\Omega}(\nabla u\,,\nabla v)\,dx.$$

Із цієї рівності отримуємо, що $u_t' \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$. Дійсно,

$$\|u_t'\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}=1}\left|\int\limits_{\Omega} f\,v\,dx - \int\limits_{\Omega}(\nabla u\,,\nabla v)\,dx\,dx\right| \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

і тому

$$\|u_t'\|^2_{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))} \leq C^2\int\limits_0^T \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int\limits_0^T \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt < \infty\,.$$

Із (7.2) при $v = u(t)$ (для майже всіх $t \in (0,T)$) також маємо

$$\left(\int\limits_{\Omega}\frac{u^2}{2}\,dx\right)_t' + \int\limits_{\Omega}(\nabla u\,,\nabla u)\,dx = \int\limits_{\Omega} f\,u\,dx$$

і (інтегруючи) отримуємо енергетичну рівність, із якої одразу випливає єдиність слабкого розв'язку задачі (7.2). $\triangleright$

Початково-краєва задача для рівняння теплопровідності у 1-періодичних функціях формулюється аналогічно: знайти $u(x,t) \in L^2((0,T);H^1_{pR*}((0,1)^n))$:

$$u_t' - \Delta u = f \qquad \text{в} \qquad L^2((0,T);H^{-1}_{pR*}((0,1)^n)), \tag{7.8}$$

$$u|_{t=0} = u_0 \qquad \text{в} \qquad H^0_{pR*}((0,1)^n).$$

Слабким розв'язком 1-періодичної задачі (7.8) називається елемент

$$u \in L^2((0,T);H^1_{pR*}((0,1)^n))$$

такий, що $u_t' \in L^2((0,T);H^{-1}_{pR*}((0,1)^n))$, $u|_{t=0} = u_0$ в $H^0_{pR*}((0,1)^n)$ і

$$\int\limits_{(0,1)^n} u_t'\,v\,dx + \int\limits_{(0,1)^n}(\nabla u\,,\nabla v)\,dx = \int\limits_{(0,1)^n} f\,v\,dx$$

для будь-якого елементу $v \in H^1_{pR*}((0,1)^n)$ і майже всіх $t \in (0,T)$.

Теорема 7.3 (про існування слабкого розв'язку 1-періодичної початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності). *Нехай* $f \in L^2((0,T); H^0_{pR*}((0,1)^n))$ *і* $u_0 \in H^0_{pR*}((0,1)^n)$. *Тоді існує єдиний слабкий розв'язок* u *задачі (7.8),*

$$u \in C^0([0,T]; H^0_{pR*}((0,1)^n))$$

і для майже всіх $t \in (0,T)$ *виконана енергетична рівність*

$$\int\limits_{(0,1)^n} \frac{u^2}{2}\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{(0,1)^n} |\nabla u|^2 \, dx\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{(0,1)^n} f\, u \, dx\, d\tau + \int\limits_{(0,1)^n} \frac{u_0^2}{2}\, dx\,. \qquad (7.9)$$

Доведення цієї теореми повторює доведення теореми 7.2. Теорему 7.3 можна довести і використовуючи явне представлення розв'язку задачі (7.8) у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{m \in Z^n_*} \alpha_m\, e^{-(2\pi)^2|m|^2 t + (x,m)\, 2\pi i} + \sum_{m \in Z^n_*} e^{(x,m)\, 2\pi i} \int\limits_0^t f_m(\tau)\, e^{-(2\pi)^2|m|^2(t-\tau)}\, d\tau, \quad (7.10)$$

де

$$\alpha_m = \int\limits_{(0,1)^n} e^{-(x,m)\, 2\pi i}\, u_0(x)\, dx, \qquad f_m(t) = \int\limits_{(0,1)^n} e^{-(x,m)\, 2\pi i}\, f(x,t)\, dx$$

є коефіцієнтами Фур'є елементів $u_0(x)$ і $f(x,t)$ для $m \in Z^n_*$. Таким чином,

$$u_m(t) = \alpha_m\, e^{-(2\pi)^2|m|^2 t} + \int\limits_0^t f_m(\tau)\, e^{-(2\pi)^2|m|^2(t-\tau)}\, d\tau$$

є коефіцієнтами Фур'є розв'язку $u(x,t)$ задачі (7.8) для $m \in Z^n_*$.

Представлення (7.9) є коректним у разі, коли Z^n_* замінено на Z^n та розв'язок задачі (7.8) розшукується як елемент простору $u \in L^2((0,T); H^1_{pRr}((0,1)^n))$, де

$$H^s_{pRr}((0,1)^n) = \{\, u = \sum_{m \in Z^n} \alpha_m\, e^{(x,m)\, 2\pi i} \in H^s_{per}((0,1)^n) \;:\; \alpha_m = \overline{\alpha}_{-m} \quad \forall\, m \in Z^n \}$$

позначає підпростір 1-періодичних дійснозначних функцій в $H^s_{per}((0,1)^n)$.

Рівняння задач, що моделюють рух в'язкої нестискуваної рідини, містять таке рівняння нерозривності (умова соленоїдальності)

$$\operatorname{div} u \;=\; 0.$$

Зручно вводити це рівняння у визначення відповідних просторів, у яких розглядатимуться розв'язки цих задач. Наприклад, розв'язки 1-періодичних задач можна розглядати у просторах

$$H^s_{pd*} = \{\ u = \sum_{m\in Z^n_*} (\alpha^1_m, \ldots, \alpha^n_m)\, e^{(x,m)\,2\pi i} \in H^s_{pR*}((0,1)^n)^n \ :\ \ \mathrm{div}\, u\ =\ 0\ \} =$$

$$= \{\, u \in H^s_{pR*}((0,1)^n)^n\ :\ \ m_1\alpha^1_m + \ldots + m_n\alpha^n_m = 0 \quad \forall\, m = (m_1, \ldots, m_n) \in\ Z^n_*\}.$$

Підпростір $H^s_{pd*} \subset H^s_{pR*}((0,1)^n)^n$ є повним, оскільки співпадає із множиною нулів лінійного обмеженого оператору div, що діє із $H^s_{pR*}((0,1)^n)^n$ в $H^{s-1}_{pR*}((0,1)^n)$.

Розглянемо, наприклад, 1-періодичну початково-краєву задачу для рівняння Стокса: знайти $(u(x,t), p(x,t)) \in L^2((0,T); H^1_{pd*}) \times L^2((0,T); H^0_{pR*}((0,1)^n))$:

$$u'_t\ -\ \mu\,\Delta u\ +\ \nabla p\ = f \qquad \text{в} \qquad L^2((0,T); H^{-1}_{pR*}((0,1)^n))^n, \tag{7.11}$$

$$u|_{t=0} = u_0 \qquad \text{в} \qquad H^0_{pd*}.$$

Помножимо скалярно перше рівняння в (7.11) на $v\ \in\ H^1_{pd*}$, проінтегруємо отриману рівність по $(0,1)^n$ та частинами. Тоді

$$\int\limits_{(0,1)^n} u'_t\, v\, dx\ +\ \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u\,, \nabla v)\, dx\ =\ \int\limits_{(0,1)^n} f\, v\, dx, \tag{7.12}$$

оскільки у відповідності із (5.14) маємо

$$\int\limits_{(0,1)^n} (\nabla p\,, v)\, dx = \int\limits_{(0,1)^n} p\ (-\mathrm{div}\, v)\, dx = 0.$$

Крім того, в (7.12) використовується, наприклад, позначення

$$\int\limits_{(0,1)^n} u'_t\, v\, dx\ =\ \int\limits_{(0,1)^n} (u_1)'_t\, v_1\, dx\ +\ldots \int\limits_{(0,1)^n} (u_n)'_t\, v_n\, dx,$$

де інтеграли є визначеними у відповідності із (5.4).

Слабким розв'язком задачі (7.11) для $u_0 \in H^0_{pd*}$ і $f \in L^2((0,T); H^0_{pR*}((0,1)^n))^n$ називається елемент

$$u \in L^2((0,T); H^1_{pd*})$$

такий, що $u'_t \in L^2((0,T); H^{-1}_{pR*}((0,1)^n))^n$, $u|_{t=0} = u_0$ в H^0_{pd*} і виконана інтегральна тотожність (7.12) для будь-якого $v \in H^1_{pd*}$ і майже всіх $t \in (0,T)$.

Застосовуючи оператора div до перших рівнянь в (7.11), отримуємо

$$\Delta p\ = \mathrm{div} f \qquad \text{в} \qquad L^2((0,T); H^{-1}_{pR*}((0,1)^n)). \tag{7.13}$$

Таким чином, елемент $p \in L^2((0,T); H^1_{pR*}((0,1)^n))$ може бути знайдений як єдиний розв'язок 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона. Крім того, тотожність (7.12) є векторним аналогом відповідної тотожності для задачі (7.8) і тому для задачі (7.11) виконується аналог теореми 7.3 і енергетична рівність (7.9).

Насправді зручно переформулювати задачу (7.11) із використанням теореми Ходжа. Використовуючи (5.15), можемо записати

$$f = F + \nabla\varphi,$$

де $F \in L^2((0,T); H^0_{pd*})$ і $p = \varphi$ в (7.11) у відповідності із (7.13). Таким чином, 1-періодичну початково-краєву задачу для рівняння Стокса можна звести до задачі: знайти $u(x,t) \in L^2((0,T); H^1_{pd*})$:

$$u'_t - \mu\,\Delta u = F \qquad \text{в} \qquad L^2((0,T); H^{1*}_{pd*}), \tag{7.14}$$

$$u|_{t=0} = u_0 \qquad \text{в} \qquad H^0_{pd*},$$

де H^{1*}_{pd*} є спряжений простір для H^1_{pd*} .

Слабкий розв'язок $u \in L^2((0,T); H^1_{pd*})$ для задачі (7.14) визначається за допомогою тотожності (7.12), де інтеграли розуміються як спряженість між H^{1*}_{pd*} і H^1_{pd*}. Для такого розв'язку виконується аналог теореми 7.3 і він представляється у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{m\in Z^n_*} \alpha_m\, e^{-(2\pi)^2\mu|m|^2 t + (x,m)\,2\pi i} + \sum_{m\in Z^n_*} e^{(x,m)\,2\pi i} \int_0^t f_m(\tau)\, e^{-(2\pi)^2\mu|m|^2(t-\tau)}\, d\tau,$$

де α_m і $f_m(t)$ є коефіцієнтами Фур'є елементів $u_0(x)$ і $F(x,t)$ для $m \in Z^n_*$. Таким чином,

$$u_m(t) = \alpha_m\, e^{-(2\pi)^2\mu|m|^2 t} + \int_0^t f_m(\tau)\, e^{-(2\pi)^2\mu|m|^2(t-\tau)}\, d\tau$$

є коефіцієнтами Фур'є розв'язку $u(x,t)$ задачі (7.14) для $m \in Z^n_*$.

8. Початково-краєва 1-періодична задача для рівнянь Нав'є-Стокса

Розглянемо для $n = 2, 3, 4$, $u_0 \in H^0_{pd*}$ і $f \in L^2((0,T); H^0_{pd*})$ початково-краєву 1-періодичну задачу для рівнянь Нав'є-Стокса: знайти (u, p):

$$u'_t - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{в} \quad (0,1)^n \times (0,T), \tag{8.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad (0,1)^n \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad (0,1)^n.$$

Помножимо скалярно рівняння (8.1) на вектор-функцію $v \in H^1_{pd*}$, проінтегруємо отриману рівність по $(0,1)^n$ та частинами. Тоді

$$\int\limits_{(0,1)^n} (u'_t, v)\, dx + \mu \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u, \nabla v)\, dx + \int\limits_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v)\, dx = \int\limits_{(0,1)^n} (f, v)\, dx. \tag{8.2}$$

Слабким розв'язком 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса називається елемент

$$u \in L^2((0,T); H^1_{pd*})$$

такий, що $u'_t \in L^1((0,T); H^{1*}_{pd*})$, $u|_{t=0} = u_0$ в H^1_{pd*} і виконана інтегральна тотожність (8.2) для будь-якої вектор-функції $v \in H^0_{pd*}$ і майже всіх $t \in (0,T)$.

Теорема 8.1 (Соболєва про вкладення $L^q((0,1)^n) \subset H^1_{pR*}$). *Нехай* $u \in H^1_{pR*}$. *Тоді існують постійні* $C_1 = C_1(q, n)$ *і* $C_2 = C_2(n)$ *такі, що*

$$\|u\|_{L^q((0,1)^n)} \le C_1 \|u\|_{H^1_{pR*}} \qquad \text{при} \qquad n = 2 \qquad \text{і} \qquad 1 \le q < \infty\,;$$

$$\|u\|_{L^6((0,1)^n)} \le C_2 \|u\|_{H^1_{pR*}} \qquad \text{при} \qquad n = 3\,;$$

$$\|u\|_{L^{2n/(n-2)}((0,1)^n)} \le C_2 \|u\|_{H^1_{pR*}} \qquad \text{при} \qquad n \ge 3\,. \qquad \lhd \ \rhd$$

Із формули Стокса (інтегрування частинами) та нерівності Гельдера маємо

$$\left| \int\limits_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v)\, dx \right| = \left| \int\limits_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla v, u)\, dx \right| \le \int\limits_{(0,1)^n} |\,(u \cdot \nabla v, u)\,|\; dx \le$$

$$\le \|u\|^2_{L^4((0,1)^n)^n} \|\nabla v\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}} \le C_2\, \|u\|^2_{H^1_{pd*}} \|v\|_{H^1_{pd*}}$$

і

$$\|u\cdot\nabla u\|_{H^{1*}_{pd*}} = \sup_{\|v\|_{H^1_{pd*}}=1} \left| \int\limits_{(0,1)^n} (u\cdot\nabla u\,,v)\,dx \right| \le\ C_2\|u\|^2_{H^1_{pd*}}$$

Таким чином, всі інтеграли в (8.2) є визначеними.

Теорема 8.2 (про існування слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса). *Нехай $f\in L^2((0,T);H^0_{pd*})$ і $u_0\in H^0_{pd*}$. Тоді слабкий розв'язок $u\in L^2((0,T);H^1_{pd*})$ рівнянь Нав'є-Стокса існує,*

$$u\in \widetilde{L}^\infty((0,T);H^0_{pd*})$$

і для майже всіх $t\in(0,T)$ виконана енергетична нерівність

$$\int\limits_{(0,1)^n} \frac{|u|^2}{2}\,dx\ +\ \mu\int\limits_0^t\int\limits_{(0,1)^n}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau\ \le\ \int\limits_{(0,1)^n}\frac{|u_0|^2}{2}\,dx\ +\int\limits_0^t\int\limits_{(0,1)^n}(f,u)\,dx\,d\tau\,.$$

◁ Гільбертовий простір H^1_{pd*} є сепарабельним. Тому знайдуться лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^\infty\subset H^1_{pd*}$ такі, що множина

$$\widetilde{H}=\{\,v\in H^1_{pd*}\,:\,v=\sum_{i=1}^m\alpha_i w_i\,,\quad \forall\,\alpha_i\in\mathbf{R},\quad \forall\,m\in\mathbf{N}\,\}$$

є щільною в H^1_{pd*}.

Фіксуємо ціле $m>0$ і визначимо скінченновимірний простір

$$H_m=\{\,v\in H^1_{pd*}\,:\,v=\sum_{i=1}^m\alpha_i w_i\,,\quad \alpha_i\in\mathbf{R}\,\}\,.$$

Розглянемо таку задачу: знайти $u_m=\sum_{i=1}^m\alpha_{im}(t)w_i$ таке, що

$$\int\limits_{(0,1)^n}(u_m',w_j)\,dx+\mu\int\limits_{(0,1)^n}(\nabla u_m,\nabla w_j)\,dx+\int\limits_{(0,1)^n}(u_m\cdot\nabla u_m,w_j)\,dx=\int\limits_{(0,1)^n}(f(t),w_j)\,dx,\quad (8.3)$$

$$t\in(0,T),\qquad j=1,\ldots,m,$$

$$u_m|_{t=0}=\mathrm{Pr}_{H_m}(u_0).$$

Це задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\alpha_{1m}(t),\ldots,\alpha_{mm}(t)$:

$$\sum_{i=1}^m\left(\int\limits_{(0,1)^n}(w_i\,,w_j)\,dx\right)\alpha_{im}'(t)+\mu\sum_{i=1}^m\left(\int\limits_{(0,1)^n}(\nabla w_i\,,\nabla w_j)\,dx\right)\alpha_{im}(t)\,+$$

$$+\sum_{i,l=1}^{m}\left(\int\limits_{(0,1)^n}(w_i\cdot\nabla w_i\,,w_j)\,dx\right)\alpha_{im}(t)\alpha_{lm}(t)=\int\limits_{(0,1)^n}(f(t),w_j)\,dx$$

$$t\in(0,T),\qquad j=1,\ldots,m,$$

$$u_m|_{t=0}=\mathrm{Pr}_{H_m}(u_0).$$

Задача має єдиний розв'язок. Помножимо рівняння цієї задачі на $\alpha_{jm}(t)$ і підсумуємо по $j=1,\ldots,m$, отримуємо

$$\int\limits_{(0,1)^n}(u_m'(t)\,,u_m(t))\,dx+\mu\int\limits_{(0,1)^n}(\nabla u_m(t)\,,\nabla u_m(t))\,dx=\int\limits_{(0,1)^n}(f(t),u_m(t))\,dx.\quad(8.4)$$

Із цієї рівності випливає, що

$$\left(\|u_m(t)\|^2_{H^0_{pd*}}\right)'_t+2\mu\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}=2\int\limits_{(0,1)^n}(f(t),u_m(t))\,dx\,\leq$$

$$\leq\,2\,\|f(t)\|_{L^2((0,1)^n)^n}\|u_m(t)\|_{H^0_{pd*}}\leq\mu\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}+C\,\|f(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^n}.$$

Інтегруючи цю нерівність по $t\in(0,s)$, маємо

$$\|u_m(s)\|^2_{H^0_{pd*}}+\mu\int\limits_0^s\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}\,dt\,\leq$$

$$\leq\,\|\mathrm{Pr}_{H_m}(u_0)\|^2_{H^0_{pd*}}+C\int\limits_0^s\|f(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^n}\,dt.$$

Таким чином, для деякої постійної $M>0$ виконані нерівності

$$\|u_m\|_{\widetilde{L}^\infty((0,T);H^0_{pd*})}+\|\nabla u_m\|_{L^2((0,T);L^2((0,1)^n)^{n\times n})}\leq M$$

та існують $u\in\widetilde{L}^\infty((0,T);H^0_{pd*})\cap L^2((0,T);H^1_{pd*})$ і підпослідовність

$$u_{\widetilde{m}}\in L^2((0,T);H^1_{pd*})$$

такі, що

$$u_{\widetilde{m}}\rightharpoonup u\quad\text{в}\quad L^2((0,T);H^1_{pd*})\quad\text{і}\quad u_{\widetilde{m}}\overset{*}{\rightharpoonup}u\quad\text{в}\quad\widetilde{L}^\infty((0,T);H^0_{pd*}).\qquad(8.5)$$

Із додаткових оцінок можна також отримати, що

$$u_{\widetilde{m}}\to u\quad\text{в}\quad L^2((0,T);H^0_{pd*}).\qquad(8.6)$$

Помножимо рівняння (8.3) на функцію $\varphi \in C^1[0,T]$ таку, що $\varphi(T)=0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0,T]$ та частинами. Тоді

$$\int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (u_m(t), \varphi'(t) w_j)\, dxdt + \mu \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u_m(t), \varphi(t) \nabla w_j)\, dxdt + \tag{8.7}$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (u_m(t) \cdot \nabla u_m(t), \varphi(t) w_j) dxdt = \int\limits_{(0,1)^n} (u_m(0), \varphi(0) w_j) dx + \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (f(t), \varphi(t) w_j) dxdt.$$

Співвідношень (8.5) і (8.6) досить, щоб перейти до границі в (8.7) і отримати, що

$$\int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (u(t), \varphi'(t) v)\, dxdt + \mu \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u(t), \varphi(t) \nabla v)\, dxdt + \tag{8.8}$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (u(t) \cdot \nabla u(t), \varphi(t) v) dxdt = \int\limits_{(0,1)^n} (u_0, \varphi(0) v) dx + \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (f(t), \varphi(t) v) dxdt$$

для будь-якого $v \in \widetilde{H}$ і тому для будь-якого $v \in H^1_{pd*}$.

Із (8.8) при $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ випливає, що виконана інтегральна тотожність (8.2).

Відповідно, із тотожності (8.2) отримуємо таку рівність

$$\int\limits_{(0,1)^n} (u'_t, v)\, dx = \int\limits_{(0,1)^n} (f, v)\, dx - \mu \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u, \nabla v)\, dx - \int\limits_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v)\, dx.$$

Звідки маємо $u'_t \in L^1((0,T); H^{1*}_{pd*})$. Дійсно, наприклад, із формули Стокса (інтегрування частинами) та нерівності Гельдера випливає, що

$$\left| \int\limits_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v)\, dx \right| = \left| \int\limits_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla v, u)\, dx \right| \le \int\limits_{(0,1)^n} |\,(u \cdot \nabla v, u)\,|\; dx \le$$

$$\le \|u\|^2_{L^4((0,1)^n)^n} \|\nabla v\|_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}} \le C_2 \|u\|^2_{H^1_{pd*}} \|v\|_{H^1_{pd*}}.$$

Таким чином, отримуємо нерівність

$$\|u \cdot \nabla u\|_{H^{1*}_{pd*}} = \sup_{\|v\|_{H^1_{pd*}}=1} \left| \int\limits_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v)\, dx \right| \le C_2 \|u\|^2_{H^1_{pd*}}.$$

Відповідно, інтегруючи цю нерівність, маємо

$$\|u \cdot \nabla u\|_{L^1((0,T);H^{1*}_{pd*})} = \int\limits_0^T \|u \cdot \nabla u\|_{H^{1*}_{pd*}} dt \le C_2 \int\limits_0^T \|u\|^2_{H^1_{pd*}} dt < \infty\,.$$

Крім того, відомо, що із $u \in \widetilde{L}^{\infty}((0,T); H^0_{pd*})$ і $u'_t \in L^1((0,T); H^{1*}_{pd*})$ випливає, що u слабо неперервна як функція із $[0,T]$ в H^0_{pd*} (тобто $\forall v \in H^0_{pd*}$ функція $t \mapsto \int\limits_{(0,1)^n} (u(t), v)\, dx$ є неперервною)

Помножимо тотожність (8.2) на функцію $\varphi \in C^1[0,T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0,T]$ та частинами. Тоді

$$\int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (u(t), \varphi'(t)v)\, dxdt + \mu \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v)\, dxdt + \tag{8.9}$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (u(t)\cdot\nabla u(t), \varphi(t)v) dxdt = \int\limits_{(0,1)^n} (u|_{t=0}, \varphi(0)v) dx + \int\limits_0^T \int\limits_{(0,1)^n} (f(t), \varphi(t)v) dxdt$$

для будь-якого $v \in H^1_{pd*}$. Порівнюючи (8.8) і (8.9) при $\varphi(0) = 1$, отримуємо

$$\int\limits_{(0,1)^n} (u|_{t=0}, v)\, dx = \int\limits_{(0,1)^n} (u_0, v)\, dx \qquad \forall\, v \in H^1_{pd*}.$$

Таким чином, виконана рівність $u|_{t=0} = u_0$ в H^0_{pd*}.

Інтегруючи (8.4), отримаємо рівність

$$\|u_m(t)\|^2_{H^0_{pd*}} + 2\mu \int\limits_0^t \|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}} ds = \|\mathrm{Pr}_{H_m}(u_0)\|^2_{H^0_{pd*}} + 2\int\limits_0^t \int\limits_{(0,1)^n} (f(s), u_m(s))\, dxds.$$

Помножимо це рівняння на функцію $\varphi \in C_0^{\infty}((0,T))$ таку, що $\varphi \geq 0$ та проінтегруємо отриману рівність по $(0,T)$. Тоді

$$\int\limits_0^T \left(\|u_m(t)\|^2_{H^0_{pd*}} + 2\mu \int\limits_0^t \|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}\, ds \right) \varphi(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \left(\|\mathrm{Pr}_{H_m}(u_0)\|^2_{H^0_{pd*}} + 2\int\limits_0^t \int\limits_{(0,1)^n} (f(s), u_m(s))\, dxds \right) \varphi(t)\, dt.$$

Використовуючи (8.5), перейдемо до нижньої границі в цій рівності. У результаті знаходимо, що

$$\int\limits_0^T \left(\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}} + 2\mu \int\limits_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}\, ds \right) \varphi(t)\, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T \left(\|u_0\|^2_{H^0_{pd*}} + 2\int\limits_0^t \int\limits_{(0,1)^n} (f(s), u(s))\, dxds \right) \varphi(t)\, dt.$$

Ця нерівність еквівалентна енергетичній нерівності. $\triangleright$

Лема 8.2 (Соболєва про вкладення $L^4((0,1)^n) \subset H^1_{pR*}$) при $n = 2, 3$). *Нехай* $u \in H^1_{pR*}$. *Тоді*

$$\|u\|_{L^4((0,1)^n)} \leq 2^{1/4}\|u\|^{1/2}_{H^0_{pR*}}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^2((0,1)^n)} \qquad \textit{при} \qquad n = 2\,;$$

$$\|u\|_{L^4((0,1)^n)} \leq 2^{1/2}\|u\|^{1/4}_{H^0_{pR*}}\|\nabla u\|^{3/4}_{L^2((0,1)^n)} \qquad \textit{при} \qquad n = 3\,. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Теорема 8.3 (про регулярність слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 2, 3$). *Нехай* $u \in L^2((0,T); H^1_{pd*}) \cap \widetilde{L}^\infty((0,T); H^0_{pd*})$ *є слабким розв'язком рівнянь Нав'є-Стокса. Тоді*

$$u'_t \in L^2((0,T); H^{1*}_{pd*}), \quad u \in L^4((0,T); L^4((0,1)^n)) \cap C^0([0,T]; H^0_{pd*}) \qquad \textit{при} \quad n = 2;$$

$$u'_t \in L^{4/3}((0,T); H^{1*}_{pd*}), \quad u \in L^{8/3}((0,T); L^4((0,1)^n)) \qquad \textit{при} \quad n = 3. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Теорема 8.4 (про єдиність слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 2, 3$). *Нехай* $\{u\} \subset L^2((0,T); H^1_{pd*}) \cap \widetilde{L}^\infty((0,T); H^0_{pd*})$ *є слабкими розв'язками рівнянь Нав'є-Стокса. Тоді*

$$\textit{слабкий розв'язок є єдиним} \qquad \textit{при} \qquad n = 2;$$

якщо $\{u\} \subset L^8((0,T); L^4((0,1)^n))$, *тоді слабкий розв'язок є єдиним при* $n = 3$.

$\triangleleft$ ($n = 2$). Припустимо, що u_1 і u_2 є розв'язками задачі (8.2). Тоді різниця $u = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношення

$$\Big(\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}}\Big)'_t + 2\mu\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}} = -2\int\limits_{(0,1)^n}(u(t)\cdot\nabla u_2(t), u(t))\,dx \leq$$

$$\leq 2\,\|u\|^2_{L^4((0,1)^n)^n}\|\nabla u_2\|_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}} \leq$$

$$\leq 2^{3/2}\|u\|_{H^0_{pR*}}\|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}\|\nabla u_2\|_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}} \leq$$

$$\leq 2\mu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}} + \frac{1}{\mu}\,\|u(t)\|^2_{H^0_{pR*}}\|\nabla u_2(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}$$

згідно з лемою 8.2. Таким чином, маємо

$$\Big(\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}}\Big)'_t \leq \frac{1}{\mu}\,\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}}\|\nabla u_2(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}$$

або

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t\|\nabla u_2(s)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}\,ds\right)\cdot\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}}\right)'_t \leq 0,$$

тобто $\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}} \leq 0$ при $t \in [0,T]$. $\quad (n = 2)\ \triangleright$

$\triangleleft$ ($n = 3$). Припустимо, що u_1 і u_2 є розв'язками задачі (8.2). Тоді різниця $u = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношення

$$\left(\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}}\right)'_t + 2\mu\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}} = 2\int\limits_{(0,1)^n}(u(t)\cdot\nabla u(t), u_2(t))\,dx \le$$

$$\le 2\|u\|_{L^4((0,1)^n)^n}\|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}\|u_2\|_{L^4((0,1)^n)^n} \le$$

$$\le 2^{3/2}\|u\|^{1/4}_{H^0_{pd*}}\|\nabla u\|^{7/4}_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}}\|u_2\|_{L^4((0,1)^n)^n} \le$$

$$\le 2\mu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2((0,1)^n)^{n\times n}} + C\,\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}}\|u_2(t)\|^8_{L^4((0,1)^n)^n}$$

згідно з лемою 8.2 (та нерівністю $ab \le \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{q}(\frac{b}{\varepsilon})^q$, виконану при $a, b, \varepsilon > 0$ та $p, q \ge 1$ таких, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Таким чином, маємо

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t\|u_2(s)\|^8_{L^4((0,1)^n)^n}\,ds\right)\cdot\|u(t)\|^2_{H^0_{pd*}}\right)'_t \le 0,$$

оскільки функція $t \mapsto \|u_2(t)\|^8_{L^4((0,1)^n)^n}$ є інтегрованою. ($n = 3$) $\triangleright$

Теорема 8.5 (Фурсікова А.В. про щільну єдиність слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 3$). *Нехай $n = 3$ і $u_0 \in H^1_{pd*}$. Тоді існує множина $F = \{f\} \subset L^2((0,T); H^0_{pd*})$, яка щільна в*

$$L^q((0,T); H^{1\,*}_{pd*}) \quad \text{для фіксованого} \quad q \quad \text{при} \quad 1 \le q < \frac{4}{3},$$

та слабкий розв'язок 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса, відповідний u_0 і фіксованому $f \in F$ є єдиним. $\triangleleft\,\triangleright$

Рекомендована література

1. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1988. 512с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1989. 624 с.

3. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М.: Наука, 1970. 288 с.

4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – М.: Наука, 1965. 520 с.

5. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.:Наука, 1989. 384с.

6. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса.* – М.: Мир, 1981. 408 с.

7. Шубин М.А. *Лекции об уравнениях математической физики.* – М.: МЦНМО, 2003. 303 с.

Додаткова література

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. *Численные методы и программное обеспечение.* – М.: Мир, 2002. 348 с.

2. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Наука, 1985. 416 с.

3. Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. *Теория меры и тонкие свойства функций.* – Н.: Научная книга, 2002. 216 с.