

"Математику уже за то любить стоит, что она ум в порядок приводит"

М.В.Ломоносов

1. Проблеми оптимізації

1.1. Основна задача оптимізації: знайти мінімум функції

$$f : X \rightarrow \mathbf{R},$$

визначеною на деякій множині X , при обмеженні $x \in D \subset X$. Стисло це записується таким чином

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in D. \quad (1.1)$$

Множина D називається множиною *допустимих елементів* задачі (1.1). Якщо $D = X$, то задача (1.1) називається *задачею без обмежень*.

В1.1. Розв'язком задачі (1.1) є $\dot{x} \in X$ таке, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \quad \forall x \in D.$$

Такий мінімум називається *глобальним* або *абсолютним* мінімумом задачі (1.1). Позначення: $\dot{x} \in \text{absmin}(1.1)$.

Величина $f(\dot{x})$ ($\dot{x} \in \text{absmin}(1.1)$) називається *чисельним значенням* задачі (1.1) та позначається S_{\min} або S_{absmin} .

Множина розв'язків задачі (1.1) позначається $\text{Arg}(1.1)$.

Якщо мінімум не досягається на D , то вказують послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ таку, що

$$f(x_n) \rightarrow S_{\min}.$$

(Тобто розглядають замість (1.1) задачу: $f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in D$.)

При розгляді (1.1) корисно відшукувати не тільки абсолютні мінімуми задачі але і локальні мінімуми.

В1.2. *Локальним* мінімумом задачі (1.1) називається $\dot{x} \in X$ таке, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \quad \forall x \in U \cap D,$$

де U є деяким околom $\dot{x} \in D$. Позначення: $\dot{x} \in \text{locmin}(1.1)$.

1.2. Нехай $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Якщо функція f диференційована k разів в точці $\dot{x} \in \mathbf{R}$ тоді пишуть $f \in C^k(\dot{x})$. Околом $\dot{x} \in \mathbf{R}$ є множина

$$U = \{x \in \mathbf{R} : |x - \dot{x}| < r\} \quad \text{для деякого } r \in \mathbf{R}_+ = \{s \in \mathbf{R} : s > 0\}.$$

Розглянемо задачу оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1.2)$$

Позначимо для такої задачі $\text{locmin } f = \text{locmin}(1.2)$.

Теорема 1.1 (Ферма, 1629). *Якщо $\dot{x} \in \text{locmin } f$ і $f \in C^1(\dot{x})$, тоді*

$$f'(\dot{x}) = 0. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 1.2. *Припустимо, що $f \in C^2(\dot{x})$ в деякій точці $\dot{x} \in \mathbf{R}$.*

1. *Необхідні умови мінімуму:*

$$\dot{x} \in \text{locmin } f \quad \Rightarrow \quad f'(\dot{x}) = 0, \quad f''(\dot{x}) \geq 0.$$

2. *Достатні умови мінімуму:*

$$f'(\dot{x}) = 0, \quad f''(\dot{x}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \in \text{locmin } f. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 1.3. *Припустимо, що $f \in C^k(\dot{x})$ в деякій точці $\dot{x} \in \mathbf{R}$ для $k \geq 2$.*

1. *Необхідні умови мінімуму:*

$$\dot{x} \in \text{locmin } f \quad \Rightarrow$$

$$a) \quad f'(\dot{x}) = 0, \dots, f^k(\dot{x}) = 0 \quad \text{або}$$

$$b) \quad f'(\dot{x}) = 0, \dots, f^{2l-1}(\dot{x}) = 0 \quad f^{2l}(\dot{x}) \geq 0 \quad \text{для } l : 2 \leq 2l \leq k.$$

2. *Достатні умови мінімуму:*

$$f'(\dot{x}) = 0, \dots, f^{2l-1}(\dot{x}) = 0 \quad f^{2l}(\dot{x}) > 0 \quad \text{для } l : 2 \leq 2l \leq k$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} \in \text{locmin } f. \quad \triangleleft \triangleright$$

1.3. Розглянемо функцію $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Якщо функція диференційована k разів по x_1, \dots, x_n в точці $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ тоді пишуть $f \in C^k(\dot{x})$. Околом $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ є множина

$$U = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - \dot{x}| < r\} \quad \text{для деякого } r \in \mathbf{R}_+.$$

Теорема 1.4. Якщо $\dot{x} \in \text{locmin } f$ і $f \in C^1(\dot{x})$, тоді

$$\nabla f(\dot{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_n} = 0.$$

◁ Розглянемо функцію однієї змінної $\varphi(x_i) = f(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{i-1}, x_i, \dot{x}_{i+1}, \dots, \dot{x}_n)$ для $i = 1, \dots, n$. Маємо $\dot{x} \in \text{locmin } \varphi$

$$\Rightarrow \quad \varphi'_{x_i}(\dot{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad \triangleright$$

Теорема 1.5. Припустимо, що $f \in C^2(\dot{x})$ в деякій точці $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ та позначимо

$$\nabla^2 f(\dot{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\dot{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n.$$

1. Необхідні умови мінімуму:

$$\dot{x} \in \text{locmin } f \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\dot{x}) = 0, \quad \langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n.$$

2. Достатні умови мінімуму:

$$\nabla f(\dot{x}) = 0, \quad \langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \in \text{locmin } f.$$

◁ 1. Маємо $\dot{x} \in \text{locmin } f$, отже $\nabla f(\dot{x}) = 0$ та

$$f(\dot{x} + \alpha h) - f(\dot{x}) \geq 0$$

для фіксованого $h \in \mathbf{R}^n$ і малих $\alpha \in \mathbf{R}$.

Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(\dot{x} + \alpha h) - f(\dot{x}) = \frac{\alpha^2}{2} \langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle + r(\alpha h) \geq 0$$

для фіксованого $h \in \mathbf{R}^n$ і малих $\alpha \in \mathbf{R}$. Поділивши на α^2 і обчислюючи $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$, маємо

$$\langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n. \quad \triangleright 1.$$

◁ 2. Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(\dot{x} + h) - f(\dot{x}) = \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle + r(h) \geq \frac{\kappa}{2} |h|^2 + r(h) \geq 0$$

для деякого $\kappa > 0$ і малих $h \in \mathbf{R}^n$, оскільки $r(h)$ є достатньо малим. Таким чином

$$\dot{x} \in \text{locmin } f. \quad \triangleright 2.$$

1.4. Задача планування на підприємстві.

Нехай на підприємстві є виробничі ресурси m типів в об'ємах b_1, \dots, b_m . Підприємство виробляє продукцію n типів. На виробництво одиниці продукції j -го типу потрібно використовувати ресурс кожного i -го типу в об'ємі a_i^j . Прибуток від реалізації одиниці продукції j -го типу дорівнює c_j . Таким чином, при виготовленні x_j одиниць продукції кожного j -го типу прибуток є

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Знайти план виробництва $x \in \mathbf{R}^n$ такий, що прибуток $f(x)$ є максимальним:

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n :$$

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n = b_1,$$

$$a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n = b_2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \dots + a_m^n x_n = b_m,$$

де $\overline{\mathbf{R}}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n\}$.

Ця задача називається задачею лінійного програмування в канонічній формі.

Рівність

$$a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \dots + a_i^n x_n = b_i$$

означає, що ресурс кожного i -го типу витрачений повністю.

Якщо ресурс кожного i -го типу витрачений не повністю, тоді розглядають наступну задачу:

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n :$$

$$\begin{aligned}
 a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n &\leq b_1, \\
 a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n &\leq b_2, \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \dots + a_m^n x_n &\leq b_m,
 \end{aligned}$$

яку можна звести до задачі лінійного програмування в канонічній формі за допомогою введення фіктивних змінних x_{n+1}, \dots, x_{n+k} із нульовим прибутком від реалізації одиниці продукції $(n+l)$ -го типу : $c_{n+l} = 0$, $l = 1, \dots, k$.

Задача лінійного програмування є задачею оптимізації із обмеженнями типу рівностей та нерівностей.

1.5. Задача оптимізації із обмеженнями типу рівностей.

Розглянемо функції $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, де $i = 0, 1 \dots m$. Якщо функція f_i диференційована k разів по x_1, \dots, x_n у деякому околу $U(\dot{x})$ точці $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$, тоді пишуть

$$f_i \in C^k(U(\dot{x})).$$

Задачею оптимізації із обмеженнями типу рівностей називається наступна задача:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (1.3)$$

Теорема 1.6 (принцип Лагранжа). *Якщо $\dot{x} \in \text{locmin}$ (1.3) і $f_i \in C^1(U(\dot{x}))$ для $i = 0, 1 \dots m$, тоді*

$$\exists \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{0\} :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 \nabla f_0(\dot{x}) + \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0,$$

де функція $\Lambda(\dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x)$ називається функцією Лагранжа, а $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ таке, що $\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0$ називається стаціонарною точкою функції Лагранжа.

◁ Припустимо, що вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

лінійно залежні. Тоді $\exists \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{0\} : \nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0$.

Розглянемо тепер випадок, коли вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

лінійно незалежні. Тоді

$$\text{rank} \left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_j} \right)_{i=0,1,\dots,m, j=1,\dots,n} = m + 1$$

і можна вважати, що

$$\det \left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_j} \right)_{i=0,1,\dots,m, j=1,\dots,m+1} \neq 0.$$

Крім того, можна вважати, що $f_0(\dot{x}) = 0$ (якщо $f_0(\dot{x}) \neq 0$, то розглянемо функцію $\tilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\dot{x})$ для якої $\tilde{f}_0(\dot{x}) = 0$, де $\dot{x} \in \text{locmin}(1.3)$).

Визначимо відображення із околу точки $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1}$ в \mathbf{R}^{m+1} формулою

$$F(\tilde{x}) = (F_0(\tilde{x}), \dots, F_m(\tilde{x})) = (f_0(\tilde{x}, \dot{x}_{m+2}, \dots, \dot{x}_n), \dots, f_m(\tilde{x}, \dot{x}_{m+2}, \dots, \dot{x}_n)),$$

де $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{m+1})$. Маємо $F(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1}) = 0$, $F \in C^1(U(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1}))^{m+1}$ і

$$\det \left(\frac{\partial F_i(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})}{\partial x_j} \right)_{i=0,1,\dots,m, j=1,\dots,m+1} \neq 0.$$

По теоремі про обернену функцію існує обернене відображення F^{-1} із околу точки $\tilde{y} = 0$ в окіл точки $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})$ таке, що

$$F^{-1}(0) = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})$$

і $|F^{-1}(y) - (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})| \leq \kappa|y|$ для деякого $\kappa > 0$. Зокрема для малих $\varepsilon \in \mathbf{R}$, визначено

$$\tilde{x}(\varepsilon) = F^{-1}(\varepsilon, 0, \dots, 0)$$

і $F(\tilde{x}(\varepsilon)) = (\varepsilon, 0, \dots, 0)$. Отже, отримуємо

$$f_0(\tilde{x}(\varepsilon), \dot{x}_{m+2}, \dots, \dot{x}_n) = \varepsilon, \quad f_i(\tilde{x}(\varepsilon), \dot{x}_{m+2}, \dots, \dot{x}_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$|\tilde{x}(\varepsilon) - (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})| \leq \kappa|\varepsilon|,$$

що суперечить припущенням $f_0(\dot{x}) = 0$ і $\dot{x} \in \text{locmin}(1.3)$, оскільки може бути $\varepsilon < 0$. Таким чином, вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

лінійно залежні. \triangleright

Теорема 1.7 (необхідні умови мінімуму у задачі (1.3)). *Якщо $f_i \in C^2(U(\dot{x}))$ для $i = 0, 1, \dots, m$, $\dot{x} \in \text{locmin}(1.3)$ і*

$$\dim \text{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \dots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = n,$$

тоді

$$\exists \lambda = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f_0(\dot{x}) + \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0$$

і

$$\langle \nabla^2 \Lambda(\dot{x}, \lambda) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n : \quad \langle \nabla f_i(\dot{x}), h \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

де

$$\text{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \dots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = \{ c_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \dots + c_m \nabla f_m(\dot{x}) : c_i \in \mathbf{R} \}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 1.8 (достатні умови мінімуму у задачі (1.3)). *Припустимо, що $f_i \in C^2(U(\dot{x}))$ для $i = 0, 1 \dots m$,*

$$\dim \text{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \dots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = n,$$

$$\exists \lambda = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f_0(\dot{x}) + \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0$$

і

$$\langle \nabla^2 \Lambda(\dot{x}, \lambda) h, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : \quad \langle \nabla f_i(\dot{x}), h \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

тоді $\dot{x} \in \text{locmin}(1.3)$. $\triangleleft \triangleright$

2. Опуклі множини та функції

Для лінійного нормованого простору X і $a, b \in X$, множина

$$[a, b] = \{ \alpha a + (1 - \alpha) b : 0 \leq \alpha \leq 1 \}$$

називається *відрізком*, що сполучає a і b .

В2.1. Множина $K \subset X$ називається *опуклою*, якщо

$$[a, b] \subset K \quad \forall a, b \in K.$$

В2.2. Функція $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ на опуклій множині K називається *опуклою*, якщо

$$f(\alpha a + (1 - \alpha) b) \leq \alpha f(a) + (1 - \alpha) f(b) \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Теорема 2.1. Нехай $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ і $f \in C^2(\mathbf{R}^n) = \{f \in C^0(\mathbf{R}^n) : \nabla^2 f \in C^0(\mathbf{R}^n)^{n \times n}\}$. Тоді

$$f \text{ є опуклою} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad \triangleleft \triangleright$$

Множина всіх лінійних і неперервних відображень $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$ називається *спряженим* (або *дуальним*) до X і позначається X^* . Елементи $\varphi \in X^*$ називаються *функціоналами*. Норма функціоналу $\varphi \in X^*$ визначається рівністю

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\|a\|_X \leq 1} |\varphi(a)| = \sup_{a \neq \theta} \frac{|\varphi(a)|}{\|a\|_X}.$$

Лінійний простір $(X^*, \|\cdot\|_B)$ є банаховим (нормованим і повним).

Гільбертів (повний передгільбертів) простір H можна ототожнити із H^* (як нормований простір) через наступне твердження.

Теорема 2.2 (Рісс). Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ є гільбертів простір і $\varphi \in H^*$. Тоді

$$\exists 1 \ a \in H : \quad \varphi(x) = \langle x, a \rangle_H \quad \forall x \in H$$

i

$$\|\varphi\|_B = \|a\|_H = \sqrt{\langle a, a \rangle_H}.$$

В2.3. Субдиференціалом опуклої функції $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ у точці $\dot{x} \in X$ називається наступна підмножина в X^* :

$$\partial f(\dot{x}) = \{ y \in X^* : \langle x - \dot{x}, y \rangle \leq f(x) - f(\dot{x}) \quad \forall x \in X \},$$

де $\langle x - \dot{x}, y \rangle = y(x - \dot{x})$ – значення функціоналу $y \in X^*$ на елементі $x - \dot{x} \in X$.

Наприклад, якщо $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ і $f \in C^1(\mathbf{R}^n) = \{f \in C^0(\mathbf{R}^n) : \nabla f \in C^0(\mathbf{R}^n)\}$, то

$$\partial f(\dot{x}) = \nabla f(\dot{x}).$$

Теорема 2.3. Нехай $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$ є опуклими і f, g неперервні в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді

$$\partial(f + g)(\dot{x}) = \partial f(\dot{x}) + \partial g(\dot{x}) \quad \forall \dot{x} \in X. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 2.4. Нехай $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ є опуклою і розглядається задача оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

Тоді

$$\dot{x} \in \text{absmin } f \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(\dot{x}).$$

\triangleleft

$$\dot{x} \in \text{absmin } f \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(\dot{x}) \geq 0 = \langle x - \dot{x}, y \rangle \quad \forall x \in X \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(\dot{x}). \quad \triangleright$$

Наприклад, для функцій $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ субдиференціалом $\partial f(\dot{x})$ є множина кутових коефіцієнтів, при яких прямі що проходять через точку $(\dot{x}, f(\dot{x}))$ лежать під графіком функції $y = f(x)$.

Завдання для самостійної роботи: для $f(x) = |x|$ перевірити, що

$$\partial f(\dot{x}) = \text{sgn } \dot{x}, \quad \dot{x} \neq 0,$$

$$\partial f(\dot{x}) = [-1, 1], \quad \dot{x} = 0.$$

Теорема 2.5. Нехай $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^1[0, 1] = \{f \in C^0[0, 1] : f' \in C^0[0, 1]\}$ і розглядається задача оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in [0, 1].$$

Якщо $\dot{x} \in \text{locmin } f$, тоді виконана одна із наступних умов

$$i) \quad f'(\dot{x}) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \dot{x} < 1;$$

$$ii) \quad f'(\dot{x}) \geq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 0;$$

$$iii) \quad f'(\dot{x}) \leq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 1.$$

◁ Для $\dot{x} \in \text{locmin } f$, використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(x) - f(\dot{x}) = f'(\dot{x})(x - \dot{x}) + r(x - \dot{x}) \geq 0,$$

де $r(x - \dot{x})$ є малим для x достатньо близьких до \dot{x} . Таким чином, для $x \in [0, 1]$ достатньо близьких до $\dot{x} \in \text{locmin } f$, маємо одну із наступних умов

$$i) \quad f'(\dot{x}) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \dot{x} < 1 \quad (\text{Теорема Ферма});$$

$$ii) \quad f'(\dot{x}) \geq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 0, \quad \text{оскільки} \quad (x - \dot{x}) \geq 0;$$

$$iii) \quad f'(\dot{x}) \leq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 1, \quad \text{оскільки} \quad (x - \dot{x}) \leq 0. \quad \triangleright$$

Умови $i), ii), iii)$ теореми 2.5 можна записати у вигляді нерівності:

$$\text{знайти} \quad \dot{x} \in [0, 1] : \quad f'(\dot{x})(x - \dot{x}) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

яка називається *варіаційною нерівністю*.

Теорема 2.6. Нехай $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ функція на замкнутій опуклій множині $K \subset \mathbf{R}^n$, $f \in C^1(K) = \{f \in C^0(K) : \nabla f \in C^0(K)\}$ і розглядається задача оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in K.$$

Якщо $\dot{x} \in \text{locmin } f$, тоді $\dot{x} \in K$ є розв'язком варіаційної нерівності :

$$\text{знайти} \quad \dot{x} \in K : \quad \nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K, \quad (2.1)$$

де $\nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) = \langle \nabla f(\dot{x}), (x - \dot{x}) \rangle$ позначає скалярний добуток векторів.

◁ K є опуклою множиною, отже $[x, \dot{x}] \subset K$ для $\dot{x} \in \text{locmin } f$. Функція

$$\Phi(t) = f(\dot{x} + t(x - \dot{x})), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$, тому (як в теоремі 2.5) маємо

$$\Phi'(0) = \nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K. \quad \triangleright$$

Теорема 2.7. *Нехай $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ опукла функція на замкнутій опуклій множині $K \subset \mathbf{R}^n$, $f \in C^1(K)$ і $\dot{x} \in K$ є розв'язком варіаційної нерівності (2.1).*

Тоді

$$\dot{x} \in \text{absmin } f.$$

◁ Для опуклої функції $f \in C^1(K)$, маємо $\partial f(\dot{x}) = \nabla f(\dot{x})$ і

$$f(x) - f(\dot{x}) \geq \nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) \quad \forall x \in K.$$

Враховуючи варіаційну нерівність (2.1) отримуємо, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \quad \forall x \in K. \quad \triangleright$$

Розв'язок $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$ задачі планування на підприємстві за визначенням задовольняє нерівності

$$c\dot{x} \geq cx \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$$

і відповідним обмеженням типу рівностей ($Ax = b$), де $c = (c_1, \dots, c_n)$.

Таким чином, розв'язок $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$ цієї задачі є розв'язком варіаційної нерівності

$$\text{знайти } \dot{x} \in D : \quad c(\dot{x} - x) \geq 0 \quad \forall x \in D,$$

де $D = \overline{\mathbf{R}}_+^n \cap \{y \in \mathbf{R}^n : Ay = b\}$.

Теорема 2.8 (про проекцію на опуклу підмножину в \mathbf{R}^n). *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною в \mathbf{R}^n . Тоді для кожного $x \in \mathbf{R}^n$*

$$\exists 1 y \in K : \quad |x - y| = \inf_{\eta \in K} |x - \eta|. \quad (2.2)$$

◁ Позначимо через η_k мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x - \eta_k| = d = \inf_{\eta \in K} |x - \eta|. \quad (2.3)$$

Існування такої послідовності впливає із визначення інфімуму. Із рівності паралелограма

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2, \quad a, b \in \mathbf{R}^n,$$

при $a = x - \eta_k$ і $b = x - \eta_h$, отримуємо

$$|\eta_k - \eta_h|^2 = 2|x - \eta_k|^2 + 2|x - \eta_h|^2 - 4\left|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right|^2. \quad (2.4)$$

Множина K є опуклою, тому $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \in K$ і

$$d^2 \leq \left|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right|^2.$$

Отже

$$|\eta_k - \eta_h|^2 \leq 2|x - \eta_k|^2 + 2|x - \eta_h|^2 - 4d^2$$

і послідовність $\{\eta_k\} \subset K$ є фундаментальною через (2.3).

Таким чином, існує $y \in K$ таке, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = y$ і

$$|x - y| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x - \eta_k| = d.$$

Припустимо, що $y, \tilde{y} \in K$ задовольняють (2.2). Тоді, враховуючи (2.4), маємо

$$|y - \tilde{y}|^2 = 2|x - y|^2 + 2|x - \tilde{y}|^2 - 4\left|x - \frac{1}{2}(y + \tilde{y})\right|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0. \quad \triangleright$$

Розв'язок $y \in K$ задачі (2.2) називається *проекцією* x на K і позначається

$$y = \text{Pr}_K(x).$$

За визначенням $\text{Pr}_K(x) = x$ для $\forall x \in K$.

Лема 2.9. Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною \mathbf{R}^n . Тоді

$$y = \text{Pr}_K(x) \Leftrightarrow \langle y, \eta - y \rangle \geq \langle x, \eta - y \rangle \quad \forall \eta \in K.$$

\Leftarrow Нехай $x \in \mathbf{R}^n$ і $y = \text{Pr}_K(x)$, тоді

$$y + t(\eta - y) \in K \quad \forall \eta \in K, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Із (2.2) випливає, що функція

$$\Phi(t) = |x - y - t(\eta - y)|^2 = |x - y|^2 - 2t \langle x - y, \eta - y \rangle + t^2 |\eta - y|^2$$

досягає мінімуму при $t = 0$ і $\Phi'(0) \geq 0$. Тобто $\langle x - y, \eta - y \rangle \leq 0 \quad \forall \eta \in K$, або

$$\langle y, \eta - y \rangle \geq \langle x, \eta - y \rangle \quad \forall \eta \in K. \quad (\Rightarrow) \triangleright$$

$\triangleleft (\Leftarrow)$ Нехай $y \in K$ і $\langle y, \eta - y \rangle \geq \langle x, \eta - y \rangle \quad \forall \eta \in K$, тоді

$$0 \leq \langle y - x, (\eta - x) + (x - y) \rangle = -|y - x|^2 + \langle y - x, \eta - x \rangle.$$

Таким чином, $|y - x|^2 \leq \langle y - x, \eta - x \rangle \leq |y - x| |\eta - x|$ і

$$|y - x| \leq |\eta - x| \quad \forall \eta \in K. \quad (\Leftarrow) \triangleright$$

Лема 2.10. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною \mathbf{R}^n . Тоді*

$$|\text{Pr}_K(x) - \text{Pr}_K(\tilde{x})| \leq |x - \tilde{x}| \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbf{R}^n,$$

зокрема, відображення $\text{Pr}_K : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ є неперервним.

\triangleleft Нехай $x, \tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ і $y = \text{Pr}_K(x), \tilde{y} = \text{Pr}_K(\tilde{x})$. Тоді

$$\langle y, \tilde{\eta} - y \rangle \geq \langle x, \tilde{\eta} - y \rangle \quad \forall \tilde{\eta} \in K,$$

$$\langle \tilde{y}, \eta - \tilde{y} \rangle \geq \langle \tilde{x}, \eta - \tilde{y} \rangle \quad \forall \eta \in K.$$

Вибираючи $\tilde{\eta} = \tilde{y}, \eta = y$ і додаючи, отримуємо

$$|y - \tilde{y}|^2 = \langle y - \tilde{y}, y - \tilde{y} \rangle \leq \langle x - \tilde{x}, y - \tilde{y} \rangle \leq |x - \tilde{x}| |y - \tilde{y}|. \quad \triangleright$$

Теорема 2.11 (Брауер). *Нехай K є компактною опуклою підмножиною \mathbf{R}^n і $F : K \rightarrow K$ є неперервним відображенням. Тоді*

$$\exists x \in K : \quad x = F(x). \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 2.12. *Нехай K є компактною опуклою підмножиною \mathbf{R}^n і $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ є неперервним відображенням. Тоді*

$$\exists x \in K : \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

◁ Достатньо довести, що

$$\exists x \in K : \langle x, y - x \rangle \geq \langle x - F(x), y - x \rangle \quad \forall y \in K.$$

Відображення $\text{Pr}_K \circ (I - F) : K \rightarrow K$ є неперервним, отже

$$\exists x \in K : x = \text{Pr}_K \circ (I - F)(x).$$

Використовуючи лему 2.9, маємо

$$\langle x, y - x \rangle \geq \langle x - F(x), y - x \rangle \quad \forall y \in K. \quad \triangleright$$

Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною \mathbf{R}^n і $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ є неперервним відображенням. Розглянемо задачу:

$$\text{знайти } x \in K : \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \quad (2.5)$$

Якщо K обмежено, то існування розв'язку доведене в теоремі 2.12. У загальному випадку, розв'язку може не бути, наприклад, для $K = \mathbf{R}$ і $F(x) = e^x$.

Позначимо через $\Sigma_r = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq r\}$ замкнуту кулю радіусу r і

$$K_r = K \cap \Sigma_r.$$

При $K_r \neq \emptyset$ із теореми 2.12 випливає, що

$$\exists x_r \in K_r : \langle F(x_r), y - x_r \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K_r. \quad (2.6)$$

Теорема 2.13. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною \mathbf{R}^n і $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ є неперервним відображенням. Тоді*

$$\exists \text{ розв'язок задачі (2.5)} \Leftrightarrow$$

для деякого $r > 0$ розв'язок задачі (2.6) задовольняє умові $|x_r| < r$.

◁(⇒) Якщо x розв'язок задачі (2.5), тоді x розв'язок задачі (2.6) при $|x| < r$ (⇒)▷

⟨(⇐) Якщо $|x_r| < r$ тоді

$$\forall y \in K \quad \exists \varepsilon \geq 0 \quad : \quad w = x_r + \varepsilon(y - x_r) \in K_r.$$

Таким чином,

$$x_r \in K_r \subset K : \quad 0 \leq (F(x_r), w - x_r) = \varepsilon(F(x_r), y - x_r) \quad \forall y \in K,$$

тобто x_r розв'язок задачі (2.5). $(\Leftarrow)\triangleright$

Теорема 2.14. Нехай K є замкнutoю опуклою підмножиною \mathbf{R}^n і $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ є неперервним відображенням таким, що

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle}{|x - x_0|} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x \in K, \quad (2.7)$$

для деякого $x_0 \in K$. Тоді \exists розв'язок задачі (2.5).

⟨ Нехай $H > |F(x_0)|$ і $r \geq |x_0|$ такі, що

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle \geq H|x - x_0| \quad \text{при} \quad |x| \geq r, \quad x \in K.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \langle F(x), x - x_0 \rangle &\geq H|x - x_0| + \langle F(x_0), x - x_0 \rangle \geq \\ &\geq H|x - x_0| - |F(x_0)||x - x_0| \geq (H - |F(x_0)|)(|x| - |x_0|) > 0 \end{aligned}$$

при $|x| \geq r$. Якщо $x_r \in K_r$ розв'язок задачі (2.6), тоді

$$\langle F(x_r), x_r - x_0 \rangle = -\langle F(x_r), x_0 - x_r \rangle \leq 0$$

і тому $|x_r| < r$. \triangleright

В2.3. Умова (2.7) називається умовою коерцитивності для F .

Варіаційна нерівність (2.5) може мати багато розв'язків, наприклад, при $F=0$.

Нехай $x, \tilde{x} \in K$ є розв'язки цієї нерівності. Тоді

$$\langle F(x), (y - x) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K,$$

$$\langle F(\tilde{x}), (y - \tilde{x}) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Вибираючи $y = \tilde{x}$ в першій нерівності, $y = x$ в другій нерівності і складаючи ці нерівності, отримуємо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \leq 0.$$

В2.4. Відображення $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ називається *монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \geq 0 \quad \forall x, \tilde{x} \in K.$$

Відображення $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ називається *строго монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle > 0 \quad \forall x, \tilde{x} \in K : x \neq \tilde{x}.$$

Для деякого $p \in \mathbf{R}_+$, відображення $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ називається *p-сильно монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \geq |x - \tilde{x}|^p \quad \forall x, \tilde{x} \in K.$$

Таким чином, доведені наступні твердження.

Теорема 2.15. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною \mathbf{R}^n і $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ є неперервним, коерцитивним і строго монотонним відображенням.*

Тоді

$$\exists 1 x \in K : \quad \langle F(x), (y - x) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 2.16. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною \mathbf{R}^n і $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ є неперервним і p-сильно монотонним відображенням при $p > 1$.*

Тоді

$$\exists 1 x \in K : \quad \langle F(x), (y - x) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \quad \triangleleft \triangleright$$

Приклад 2.17. Визначимо замкнуту опуклу множину

$$\overline{\mathbf{R}}_+^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \}$$

неперервну функцію $F : \overline{\mathbf{R}}_+^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ і розглянемо задачу:

$$\text{знайти } \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n : \quad F(\dot{x}) \in \overline{\mathbf{R}}_+^n \quad \text{і} \quad \langle F(\dot{x}), x - \dot{x} \rangle = 0 \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n. \quad (2.8)$$

Завдання для самостійної роботи: перевірити, що елемент $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$ є розв'язком варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n : \quad \langle F(\dot{x}), x - \dot{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n \quad \text{є розв'язком задачі (2.8).}$$

Задача із перешкодою. Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є обмеженою областю (зв'язаною відкритою множиною) із гладкою межею $\partial\Omega$ і $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ така що $\psi \leq 0$ на $\partial\Omega$. Визначимо опуклу множину

$$K = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v \geq \psi \text{ в } \Omega \text{ і } v = 0 \text{ на } \partial\Omega\} \subset C^1(\overline{\Omega})$$

і розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \rightarrow \inf, \quad v \in K. \quad (2.9)$$

Припустимо, що розв'язок $u \in K$ задачі (2.9) існує. Тоді функція

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$, тому (як в теоремі 2.5) маємо

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle dx \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

яке називається *варіаційною нерівністю із перешкодою*.

Задача про мінімальну поверхню. Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ і K як в попередньому прикладі. Розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v(x)|^2} dx \rightarrow \inf, \quad v \in K. \quad (2.10)$$

Це задача про знаходження функції $u \in K$, графік якої є мінімальною поверхнею серед всіх поверхонь графіків функцій $v \in K$.

Припустимо, що розв'язок $u \in K$ задачі (2.10) існує. Тоді відповідна варіаційна нерівність має вигляд

$$\text{знайти } u \in K : \quad \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} dx \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

3. Простори Соболева.

В3.1. Відкрита обмежена зв'язна підмножина $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ називається *областю* у \mathbf{R}^n . Замикання області Ω в \mathbf{R}^n позначається $\bar{\Omega}$ (і є компактною множиною), а

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$$

називається *межею* цієї області.

Визначимо на лінійному просторі $C^1(\bar{\Omega}) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\bar{\Omega})^n\}$ норми

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}} = \max \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

В3.2. Поповнення нормованого простору $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

і називається простором *Соболева першого порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω . Зокрема, для елементів із $W^{1,p}(\Omega)$ визначений інтеграл і диференціювання. У відповідності із теоремою.

Теорема 3.3. Розглянемо оператора градієнта ∇ як лінійний оператор із $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ в $(L^p(\Omega)^n, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^n})$, $1 \leq p \leq \infty$. Тоді $\nabla \in B(C^1(\bar{\Omega}), L^p(\Omega)^n)$,

$$\exists 1 \quad \bar{\nabla} \in B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n) : \quad \bar{\nabla}(v) = \nabla(v) \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega})$$

i

$$\|\bar{\nabla}\|_{B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n)} = 1. \quad \triangleleft \triangleright$$

Для цілого $l \geq 1$ визначимо лінійні простори

$$C^l(\bar{\Omega}) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\bar{\Omega})^n, \dots, \nabla^l v \in C^0(\bar{\Omega})^{n^l}\},$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\bar{\Omega})$$

і розглянемо лінійний простір функцій, що є нескінченно диференційованими і мають компактні носії

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\},$$

де $\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$ називається *носієм* функції v .

В3.4. Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

За визначенням, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{1,p}(\Omega)$.

(Завдання для самостійної роботи:

1. Нехай $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$, $s > 0$ і

$$\psi(x) = |x|^{-s}.$$

Перевірити, що

$$\psi \in L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad ps < n \quad \text{і} \quad \psi \in W^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p(s+1) < n.$$

2. Нехай $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$ і

$$u(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Перевірити, що $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)^n$ при $1 \leq p < n$.)

4. Задача із перешкодою.

При $p = 2$ простір $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u, v)_{W^{m,p}(\Omega)} = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \bar{v}) dx,$$

де зазвичай пишуть ∇ замість $\bar{\nabla}$. Такі гільбертові простори позначаються також

$$(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) = (W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$$

і $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) = (W_0^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$.

Зокрема, простір $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ над \mathbf{R} є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx.$$

Теорема 4.1 (нерівність Фрідрікса). *Нехай $u \in H_0^1(\Omega)$. Тоді існує постійна $C = C(\Omega)$ така, що*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Із нерівності Фрідрікса випливає, що норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ і $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)^n}$ є еквівалентними на $H_0^1(\Omega)$. Дійсно, для $u \in H_0^1(\Omega)$ маємо наступні нерівності

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq (1 + C^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = (1 + C^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Таким чином, $H_0^1(\Omega)$ можна розглядати із скалярним добутком

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx.$$

В4.2. Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є обмеженою областю (зв'язаною відкритою множиною) і $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ така що $\psi \leq 0$ на $\partial\Omega$. Визначимо опуклу множину

$$K = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v \geq \psi \text{ в } \Omega \text{ і } v = 0 \text{ на } \partial\Omega\} \subset C^1(\bar{\Omega})$$

і розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \rightarrow \inf, \quad v \in K, \quad (4.1)$$

яка називається *задачею мінімізації із перешкодою* у класичній постановці.

Припустимо, що розв'язок $u \in K$ задачі (4.1) існує. Тоді функція

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$, тому маємо нерівність

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle dx \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad (4.2)$$

яка називається *варіаційною нерівністю із перешкодою* у класичній постановці.

Задачі (4.1) і (4.2) можуть не мати розв'язків. Проте, ці задачі завжди мають розв'язки "в слабкій постановці".

В4.3. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$ і $E \subset \bar{\Omega}$. Пишуть

$$u \geq 0 \quad \text{на } E \quad \text{в } W^{1,p}(\Omega),$$

якщо існує послідовність $\{u_n\} \subset C^1(\bar{\Omega})$ така, що

$$u_n \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \text{і} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{у нормі } W^{1,p}(\Omega).$$

Якщо $-u \geq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді пишуть $u \leq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$. Відповідно, якщо $u \geq 0$ і $u \leq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді пишуть

$$u = 0 \quad \text{на } E \quad \text{в } W^{1,p}(\Omega).$$

Нехай $\psi \in H^1(\Omega)$ така що $\psi \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$. Визначимо множину

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ в } \Omega\} \subset H_0^1(\Omega). \quad (4.3)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що $K \subset H^1(\Omega)$ є повним і опуклим ($a, b \in K, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha a + (1 - \alpha) b \in K$.)

Теорема 4.4 ($\exists 1$ розв'язку задачі мінімізації з перешкодою). Нехай $K \subset H_0^1(\Omega)$ визначено рівністю (4.3). Тоді

$$\exists 1 u \in K : \quad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \quad f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

і $u \in K$ задовольняє варіаційний нерівності

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle dx \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (4.4)$$

◁ Позначимо через v_k мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)} = m = \inf_{v \in K} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (4.5)$$

Існування такої послідовності випливає із визначення інфімуму. Із закону паралелограма (виконаного у кожному гільбертовому просторі)

$$\|d + b\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|d - b\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 2\|d\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|b\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall d, b \in H_0^1(\Omega),$$

при $d = v_k$ і $b = v_h$, отримуємо

$$\|v_k - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 2\|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(v_k + v_h)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Множина K є опуклою, тому $\frac{1}{2}(v_k + v_h) \in K$ і $m^2 \leq \left\|\frac{1}{2}(v_k + v_h)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2$. Отже

$$\|v_k - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2\|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - 4m^2$$

і послідовність $\{v_k\} \subset K$ є фундаментальною через (4.5).

Таким чином

$$\exists u \in K : \quad f(u) = \min_{v \in K} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \min_{v \in K} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Крім того, для $v \in K$ функція

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$, тому $u \in K$ задовольняє варіаційний нерівності (4.4).

Нехай $u, \tilde{u} \in K$ розв'язки варіаційної нерівності (4.4), тобто

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle dx &\geq 0 & \forall v \in K, \\ \int_{\Omega} \langle \nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{v} - \nabla \tilde{u} \rangle dx &\geq 0 & \forall \tilde{v} \in K. \end{aligned}$$

Обираючи $v = \tilde{u}$ в першій нерівності, $\tilde{v} = u$ в другій нерівності і додаючи ці нерівності, отримуємо

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u = \tilde{u} \quad \triangleright$$

Приклад 4.5. Розглянемо розв'язок $u \in K$ варіаційної нерівності (4.4) за додаткових умов $u \in C^2(\overline{\Omega})$ і $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$. Тоді

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad u = \psi \quad \text{в } \Omega_0,$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

де

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) > \psi(x)\} \quad \text{і} \quad \Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) = \psi(x)\}.$$

◁ Нехай $u \in K$ задовольняє (4.4) і $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Тоді знайдеться $\alpha \in \mathbf{R}$ таке, що $u(x) - \psi(x) \geq \alpha > 0$ при $x \in \text{supp } \varphi$. Продовжуючи φ нулем на Ω_0 , маємо

$$v = u \pm \varepsilon \varphi \geq \psi \quad \text{в } \Omega$$

при $0 < \varepsilon < \alpha [\max |\varphi(x)|]^{-1}$, тобто $v \in K$.

Обираючи таке $v \in K$ в (4.4), отримуємо

$$\pm \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$$

або

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

Таким чином

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad u = \psi \quad \text{в } \Omega_0. \quad \triangleright$$

Нехай $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega) : \psi_2 \geq \psi_1$ в Ω , $\psi_1 \leq 0$ і $\psi_2 \geq 0$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$.

Визначимо множину

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \text{ в } \Omega \text{ і } v = 0 \text{ на } \partial\Omega \text{ в } H^1(\Omega)\}. \quad (4.6)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що $K \subset H_0^1(\Omega)$ є повним і опуклим.)

Повторюючи доведення теореми 4.4, отримуємо наступне твердження.

Теорема 4.6 ($\exists 1$ розв'язку задачі мінімізації з перешкодами). *Нехай $K \subset H_0^1(\Omega)$ визначено рівністю (4.6). Тоді*

$$\exists 1 u \in K : \quad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \quad f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \quad \triangleleft \triangleright$$

Нехай $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega) : \psi_2 \geq \psi_1$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$. Визначимо множину

$$K = \{v \in H^1(\Omega) : \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \text{ на } \partial\Omega \text{ в } H^1(\Omega)\}. \quad (4.7)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що $K \subset H^1(\Omega)$ є повним і опуклим.)

Повторюючи доведення теореми 4.4, отримуємо також наступне твердження.

Теорема 4.7 (\exists 1 розв'язку задачі мінімізації з перешкодами на межі). *Нехай $K \subset H^1(\Omega)$ визначено рівністю (4.7). Тоді*

$$\exists 1 u \in K : \quad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \quad f(v) = \int_{\Omega} (|\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2) dx. \quad \triangleleft \triangleright$$

Відзначимо, що теорема не виконана для $f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$, оскільки таке $f(v)$ не визначає норму на $H^1(\Omega)$.

6. Варіаційні нерівності у гільбертових просторах.

Розглянемо гільбертів простір $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ над \mathbf{R} . Відображення

$$a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}, \quad u, v \mapsto a(u, v)$$

називається *білінійною формою* на H , якщо $a(u, v)$ неперервна і лінійна по кожному із аргументів. Білінійна форма *симетрична*, якщо

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H.$$

В6.1. Білінійна форма $a(u, v)$ називається *коерцитивною* на H , якщо

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

З визначень випливає, що білінійна коерцитивна симетрична форма $a(u, v)$ визначає норму $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$ на H , еквівалентну нормі $\|v\|_H$.

Кожен лінійний неперервний оператор $A : H \rightarrow H^*$ визначає білінійну форму

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in H. \quad (6.1)$$

Дійсно, білінійність $a(u, v)$ випливає із лінійності A і білінійності $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а неперервність із нерівності

$$|a(u, v)| = |\langle Au, v \rangle| \leq \|Au\|_{H^*} \|v\|_H \leq \|A\|_{B(H, H^*)} \|u\|_H \|v\|_H.$$

З іншого боку, якщо задана білінійна форма $a(u, v)$ на H , тоді для кожного $u \in H$ відображення

$$v \mapsto a(u, v) \quad \text{для } v \in H,$$

визначає лінійний неперервний функціонал на H . Тому існує лінійний оператор $A : H \rightarrow H^*$, такою що виконана рівність (6.1).

Теорема 6.2 (\exists 1 розв'язку варіаційної нерівності у гільбертовому просторі).
Нехай K є повною опуклою підмножиною гільбертового простору H , $f \in H^*$ і $a(u, v)$ є білінійною коерцитивною формою на H . Тоді

$$\exists 1 u \in K : \quad a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (6.2)$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим, тобто, якщо $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки варіаційної нерівності (6.2), відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тоді

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha)\|f - \tilde{f}\|_{H^*}. \quad (6.3)$$

◁ Доведемо спочатку нерівність (6.3). Нехай $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки варіаційної нерівності (6.2), відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тобто

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

$$a(\tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq \langle \tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in K.$$

Обираючи $v = \tilde{u}$ в першій нерівності, $\tilde{v} = u$ в другій нерівності і складаючи ці нерівності, отримуємо

$$a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \leq \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle.$$

Враховуючи умову коерцитивності, маємо

$$\alpha \|u - \tilde{u}\|_H^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^*} \|u - \tilde{u}\|_H.$$

Звідки слідує (6.3) і, крім того, єдиність розв'язку варіаційної нерівності (6.2) (якщо цей розв'язок існує). Далі, отожднюємо H і H^* .

Доведення існування розв'язку ґрунтується на наступних лемах.

Лема 6.3 (про проекцію на опуклу множину) *Нехай K є повною опуклою підмножиною H . Тоді для кожного $w \in H$*

$$\exists 1 \operatorname{Pr}_K(w) \in K : \quad \|w - \operatorname{Pr}_K(w)\|_H = \inf_{v \in K} \|w - v\|_H.$$

Крім того, проекція $\operatorname{Pr}_K(w)$ елементу $w \in H$ на K характеризується нерівністю

$$\langle w - \operatorname{Pr}_K(w), v - \operatorname{Pr}_K(w) \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \quad (6.4)$$

і задовольняє нерівності $\|\operatorname{Pr}_K(v) - \operatorname{Pr}_K(w)\|_H \leq \|v - w\|_H$.

◁ Доведення цієї леми є аналогічним доведенню теореми 2.8. ▷

Лема 6.4. *Нехай K є повною опуклою підмножиною H і $a(u, v)$ є білінійною коерцитивною формою на H . Тоді $u \in K$ є розв'язком задачі (6.2)*

$$\Leftrightarrow \quad u = \operatorname{Pr}_K(u - \gamma(Au - f)), \quad (6.5)$$

де $\gamma > 0$ і оператор $A : H \rightarrow H$ такий, що $a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in H$.

Таким чином, $u \in K$ є нерухомою точкою оператора

$$Bu = \text{Pr}_K(u - \gamma(Au - f)). \quad (6.6)$$

« \Leftarrow Визначимо $w = u - \gamma(Au - f)$. В силу (6.4) співвідношення (6.5) еквівалентно тому, що $u \in K$ і

$$\langle (u - \gamma(Au - f)) - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K,$$

тобто $u \in K$ розв'язок варіаційної нерівності (6.2), оскільки $\gamma > 0$. \gg

Для доведення теореми 6.2 відмітимо, що

$$\|Av - Aw\|_H \leq M \|v - w\|_H \quad \text{і} \quad -\langle Av - Aw, v - w \rangle \leq -\alpha \|v - w\|_H^2, \quad (6.7)$$

де $M = \|A\|_{B(H,H)}$. Тому, враховуючи що $\|\text{Pr}_K(v) - \text{Pr}_K(w)\|_H \leq \|v - w\|_H$, маємо

$$\begin{aligned} \|Bv - Bw\|_H^2 &\leq \|v - \gamma(Av - f) - w + \gamma(Aw - f)\|_H^2 = \\ &= \|v - w - \gamma(Av - Aw)\|_H^2 = \\ &= \|v - w\|_H^2 - 2\gamma \langle v - w, Av - Aw \rangle + \gamma^2 \|Av - Aw\|_H^2 \leq \\ &\leq \|v - w\|_H^2 - 2\gamma \alpha \|v - w\|_H^2 + \gamma^2 M^2 \|v - w\|_H^2 = \\ &= (1 - 2\gamma \alpha + \gamma^2 M^2) \|v - w\|_H^2, \end{aligned}$$

де B визначено співвідношенням (6.6). Таким чином, якщо

$$0 < \gamma < 2\alpha/M^2,$$

тоді оператор B є стискаючим із постійною стиснення

$$\sqrt{1 - 2\gamma \alpha + \gamma^2 M^2} < 1$$

і теорема 6.2 випливає із теореми про стискаючі відображення. \triangleright

Насправді, доведено наступне, більш загальне чим теорема 6.2, твердження.

Теорема 6.5 ($\exists 1$ розв'язку варіаційної нерівності у гільбертовому просторі).

Нехай K є повною опуклою підмножиною H і відображення $A : H \rightarrow H$ задовольняє нерівностям (6.7). Тоді

$$\exists 1 u \in K : \quad \langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (6.8)$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим, тобто, якщо $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки варіаційної нерівності (6.8), відповідні $f, \tilde{f} \in H$, тоді

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha) \|f - \tilde{f}\|_H. \quad \triangleleft \triangleright$$

Нехай $\varphi \in H^1(\Omega)$ така що $\varphi \leq 0$ на $\partial\Omega$. Визначимо множину

$$K = \{v \in H_0^1(\bar{\Omega}) : v \geq \varphi \text{ в } \Omega\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Таким чином, для $f \in L^2(\Omega)$ із теореми 6.2 випливає, що

$$\exists 1 u \in K : \quad \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla(v - u)) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \forall v \in K, \quad (6.9)$$

де

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx.$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим.

Задача (6.9) також називається *варіаційною нерівністю із перешкодою*.

Зокрема, задача оптимізації (з перешкодою):

$$F(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f v dx \rightarrow \min, \quad v \in K,$$

має розв'язок $u \in K$, оскільки функція

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$, тому маємо

$$\int_{\Omega} [\nabla u(x)][\nabla(v(x) - u(x))] dx \geq \int_{\Omega} f(x)(v(x) - u(x)) dx \quad \forall v \in K.$$

Таким чином, задача із перешкодою має єдиний розв'язок $u \in K$.

7. Варіаційні нерівності у банахових просторах

Теорема 7.1. *Нехай K є повною опуклою підмножиною гільбертового простору H , $f \in H^*$ і $a(u, v)$ є білінійною коерцитивною формою на H . Тоді*

$$\exists 1 u \in K : \quad a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 7.2 (Мінті). *Нехай K є повною опуклою підмножиною банахового простору V , $f \in V^*$, $A : V \rightarrow V^*$ є неперервним відображенням, яке монотонне, тобто*

$$\langle A(v) - A(w), v - w \rangle \geq 0 \quad \forall v, w \in V. \quad (7.1)$$

Тоді задача

$$\text{знайти } u \in K : \quad \langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (7.2)$$

еквівалентна задаче

$$\text{знайти } u \in K : \quad \langle A(v), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (7.3)$$

$\triangleleft (\Rightarrow)$ Нехай $u \in K$ задовольняє (7.2) $\forall v \in K$, тоді

$$\langle A(v), v - u \rangle = \langle A(u), v - u \rangle + \langle A(v) - A(u), v - u \rangle.$$

Використовуючи умову монотонності (7.1) і (7.2), отримуємо

$$\langle A(v), v - u \rangle \geq \langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

тобто $u \in K$ задовольняє (7.3) $\forall v \in K$. $(\Rightarrow) \triangleright$

$\triangleleft (\Rightarrow)$ Нехай $u \in K$ задовольняє (7.3) $\forall v \in K$. Фіксуємо $w \in K$, $t \in [0, 1]$ і візьмемо $v = (1 - t)u + tw = u + t(w - u)$ в (7.3), тоді

$$\begin{aligned} \langle A(v), v - u \rangle &= \langle A(u + t(w - u)), t(w - u) \rangle \\ &= t \langle A(u + t(w - u)), w - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle = t \langle f, w - u \rangle. \end{aligned}$$

Таким чином, при $t > 0$ маємо

$$\langle A(u + t(w - u)), w - u \rangle \geq \langle f, w - u \rangle \quad \forall w \in K$$

і обчислюючи $\lim_{t \rightarrow 0+}$ отримуємо, що $u \in K$ задовольняє (7.2) $\forall w \in K$. $(\Rightarrow) \triangleright$

Теорема 7.3. Нехай K є повною опуклою підмножиною банахового простору V , $f \in V^*$, $A : V \rightarrow V^*$ є неперервним монотонним відображенням.

Тоді множина розв'язків задачі (еквівалентній задаче (7.2)):

$$\text{знайти } u \in K : \quad \langle A(v), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (7.3)$$

є повною та опуклою.

◁ Нехай $u_1, u_2 \in K$ розв'язки задачі (7.3). Тоді для

$$u = tu_1 + (1 - t)u_2 \in K$$

при $t \in [0, 1]$ маємо

$$\begin{aligned} \langle A(v), v - u \rangle &= \langle A(v), t(v - u_1) + (1 - t)(v - u_2) \rangle = \\ &= t\langle A(v), v - u_1 \rangle + (1 - t)\langle A(v), v - u_2 \rangle \geq \\ &\geq t\langle f, v - u_1 \rangle + (1 - t)\langle f, v - u_2 \rangle = \\ &= \langle f, t(v - u_1) + (1 - t)(v - u_2) \rangle = \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K, \end{aligned}$$

тобто множина розв'язків задачі (7.3) є опуклою.

Нехай $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$ послідовність розв'язків задачі (7.3) і $u_m \rightarrow u$ в V . Тоді $u \in K$, оскільки K є повним, і

$$\langle A(v), v - u_m \rangle \geq \langle f, v - u_m \rangle \quad \forall v \in K.$$

Обчислюючи $\lim_{m \rightarrow \infty}$ в цій нерівності для кожного $v \in K$, отримуємо

$$\langle A(v), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

тобто множина розв'язків задачі (7.3) є повною. ▷

В7.4. Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *слабко збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \rightharpoonup x$), якщо

$$\langle f, x_k \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad \forall f \in L^* = B(L, \mathbf{C}).$$

Теорема 7.5 (про слабку компактність). Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є рефлексивний простір і послідовність $\{x_k\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ така, що

$$\|x_m\|_L \leq M \quad \text{для деякого } M \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $x \in L$ і підпослідовність $\{x_{\tilde{m}}\}_{\tilde{m}=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ такі, що

$$x_{\tilde{m}} \rightharpoonup x. \quad \triangleleft \triangleright$$

Нехай K є повною опуклою підмножиною у рефлексивному банаховому просторі V . Припустимо, що існує неперервне обмежене монотонне відображення $B : V \rightarrow V^*$ таке, що

$$B(v) = \theta \quad \Leftrightarrow \quad v \in K.$$

Таке відображення називається *оператором штрафу* (відповідним $K \subset V$).

Якщо V гільбертів простір, тоді, наприклад, $B(v) = v - \text{Pr}_K(v)$ для $v \in V$.

Для $f \in V^*$ і кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо задачу (з штрафом)

$$\text{знайти } u_\varepsilon \in V : \quad \langle A(u_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}B(u_\varepsilon), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V, \quad (7.4)$$

тобто знайти $u_\varepsilon \in V$:

$$A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} B(u_\varepsilon) = f \quad \text{в } V^*.$$

Теорема 7.6 (\exists розв'язку варіаційної нерівності у банаховому просторі).

Нехай K є повною опуклою підмножиною сепарабельного банахового простору V , $\theta \in K$, існує оператор штрафу $B : V \rightarrow V^*$, $f \in V^*$ і $A : V \rightarrow V^*$ є неперервним обмеженим монотонним відображенням таким, що

$$\lim_{\|v\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|_V} \rightarrow \infty$$

(умова коерцитивності).

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$

$$\exists u_\varepsilon \in V : \quad \langle A(u_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}B(u_\varepsilon), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

існують $u \in V$ і підпослідовність $\{u_{\tilde{\varepsilon}}\} \subset \{u_\varepsilon\} \subset V$ такі, що

$$u_{\tilde{\varepsilon}} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$$

i

$$\langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (7.5)$$

◁ Відображення $B_\varepsilon = A + \varepsilon^{-1}B$ є неперервним обмеженим і монотонним для кожного $\varepsilon > 0$, оскільки такі A і B . Крім того, B_ε є коерцитивним. Дійсно

$$\langle B_\varepsilon(v), v \rangle = \langle A(v), v \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle B(v) - B(\theta), v - \theta \rangle \geq \langle A(v), v \rangle,$$

оскільки B є монотонним (і $B(\theta) = \theta$ для $\theta \in K$), тому

$$\frac{\langle B_\varepsilon(v), v \rangle}{\|v\|_V} \geq \frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|_V} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_V \rightarrow \infty.$$

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ існує розв'язок $u_\varepsilon \in V$ задачі (7.4) через теорему 7.8. Для кожного $\varepsilon > 0$ також маємо

$$\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle \leq \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle = \langle f, u_\varepsilon \rangle \leq \|f\|_{V^*} \|u_\varepsilon\|_V$$

або

$$\frac{\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle}{\|u_\varepsilon\|_V} \leq \|f\|_{V^*}.$$

Це означає, що існує $M > 0$ таке, що $\|u_\varepsilon\|_V \leq M$. Тоді через теорему 7.5 існують $u \in V$ і підпослідовність $\{u_{\tilde{\varepsilon}}\} \subset \{u_\varepsilon\} \subset V$ такі, що

$$u_{\tilde{\varepsilon}} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Із (7.4) випливає, що

$$B(u_{\tilde{\varepsilon}}) = \tilde{\varepsilon}(f - A(u_{\tilde{\varepsilon}}))$$

де послідовність $\{A(u_{\tilde{\varepsilon}})\}$ обмежена, оскільки відображення A обмежене. Тому

$$B(u_{\tilde{\varepsilon}}) \rightarrow \theta \quad \text{при} \quad \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Для $v \in V$ використовуючи монотонність B , маємо

$$\langle B(v) - B(u_{\tilde{\varepsilon}}), v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle \geq 0$$

і обчислюючи $\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0}$ отримуємо

$$\langle B(v), v - u \rangle \geq 0.$$

Виберемо $v = u \pm tw$ в цій нерівності при $t > 0$ і $w \in V$. Тоді

$$\pm \langle B(u \pm tw), w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in V$$

і враховуючи неперервність укладаємо, що $\langle B(u), w \rangle = 0 \Leftrightarrow B(u) = \theta \Leftrightarrow u \in K$.

Для $v \in K$ використовуючи монотонність A і B , маємо

$$\begin{aligned} \langle A(v) - f, v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle &= \langle A(v) - A(u_{\tilde{\varepsilon}}), v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle + \langle A(u_{\tilde{\varepsilon}}) - f, v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle = \\ &= \langle A(v) - A(u_{\tilde{\varepsilon}}), v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \langle B(v) - B(u_{\tilde{\varepsilon}}), v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

і обчислюючи $\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0}$ отримуємо

$$\langle A(v) - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

тобто $u \in K$ задовольняє (7.5) через теорему 7.2. \triangleright

Крім того, якщо A є строго монотонним, тобто

$$\langle A(v) - A(w), v - w \rangle > 0 \quad \forall v, w \in V \quad \text{при} \quad v \neq w,$$

тоді елементи u_{ε} (для кожного ε) і u в теоремі 7.6 визначені однозначно і

$$u_{\varepsilon} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Приклад 7.7. Нехай Ω є областю, $V = H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ і

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ в } \Omega\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Тоді можна вибрати оператор штрафу таким чином

$$\langle B(v), w \rangle = - \int_{\Omega} v^-(x) w(x) dx,$$

де $v^-(x) = -\min\{v(x), 0\}$. Відповідно, задача (7.4) має вигляд

$$\text{знайти } u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon}, \nabla v) dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^- v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

і еквівалентна задаче: знайти $u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$:

$$-\Delta u_{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} u_{\varepsilon}^- = f \quad \text{в } H^{-1}(\Omega), \quad u_{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad \text{в } H^1(\Omega).$$

Теорема 7.8 (\exists розв'язку варіаційної рівності у банаховому просторі). *Нехай V є сепарабельним банаховим простором, $f \in V^*$ і $A : V \rightarrow V^*$ є неперервним обмеженим монотонним коерцитивним відображенням.*

Тоді $\exists u \in V$:

$$\langle A(u), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (7.6)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що задача (7.6) еквівалентна задаче: знайти $u \in V$:

$$\langle A(v), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in V. \quad (7.7))$$

◁ Існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$ такі, що простір

$$\tilde{V} = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільним в V .

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний лінійний простір

$$V_m = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо наступну задачу : знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m w_i \in V_m$ таке, що

$$\langle A(v), v - u_m \rangle \geq \langle f, v - u_m \rangle \quad \forall v \in V_m. \quad (7.8)$$

Така задача є варіаційною нерівністю в \mathbf{R}^m і тому існування $u_m \in V_m$ відоме.

Через теорему 7.2 ця задача еквівалентна задачі : знайти $u_m \in V_m$ таке, що

$$\langle A(u_m), v - u_m \rangle \geq \langle f, v - u_m \rangle \quad \forall v \in V_m.$$

Звідки при $v = \theta$ отримуємо

$$\langle A(u_m), u_m \rangle \leq \langle f, u_m \rangle \leq \|f\|_{V^*} \|u_m\|_V.$$

Це означає, що існує $M > 0$ таке, що $\|u_m\|_V \leq M$. Тоді через теорему 7.5 існують $u \in V$ і підпоследовність $\{u_{\tilde{m}}\} \subset \{u_m\} \subset V$ такі, що

$$u_{\tilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \tilde{m} \rightarrow \infty.$$

Залишається обчислити $\lim_{\tilde{m} \rightarrow \infty}$ в (7.8) і скористатися щільністю \tilde{V} в V , щоб отримати (7.7). ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що оператор $A = (-\Delta) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, визначений рівністю

$$\langle A(u), v \rangle = -\langle \Delta u, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx$$

для $u, v \in H_0^1(\Omega)$, задовольняє умовам обмеженості, неперервності, монотонності і коерцитивності.)

Нехай задано відображення $a(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Розглянемо умови коли оператор $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, визначений рівністю

$$\langle A(u), v \rangle = \int_{\Omega} (a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x)) dx \quad (7.9)$$

для $u, v \in H_0^1(\Omega)$, задовольняє умовам обмеженості, неперервності, монотонності і коерцитивності (тобто умовам теореми 7.6).

Теорема 7.9 (Немицького). *Нехай $p, p_1, \dots, p_m \in \mathbf{R}$ такі, що $p \geq 1, p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, \dots, p_m \geq 1$ і $a(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ задовольняє умовам (Каратеодорі):*

- (а) функція $a(x, \cdot) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ неперервна для майже всіх $x \in \Omega$;
- (б) функція $a(\cdot, \xi) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ вимірна для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m$.

Тоді $a(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) \in L^p(\Omega)$ для $\forall (u_1, \dots, u_m) \in L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega)$

$$\Leftrightarrow \exists g \in L^p(\Omega) \text{ і } c \geq 0 : |a(x, \xi)| \leq g(x) + c \sum_{i=1}^m |\xi_i|^{p_i/p} \quad (7.10)$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi = (\xi_1 \dots \xi_m) \in \mathbf{R}^m$.

Крім того, оператор (Немицького)

$$a(x, \cdot, \dots, \cdot) : L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \quad (7.11)$$

є обмеженим і неперервним, якщо виконано (7.10).

◁ Нехай $(u_1, \dots, u_m) \in L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega)$. Перевіримо, наприклад, що тоді $a(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) \in L^p(\Omega)$. Відомо і безпосередньо перевіряється, що функція $a(x, u_1(x), \dots, u_m(x))$ є вимірною. Із (7.10) і відомої нерівності

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)^p \leq m^{p-1}(\alpha_1^p + \dots + \alpha_m^p) \quad (\text{де } \alpha_i \geq 0 \text{ і } p \geq 1)$$

маємо

$$|a(x, u_1(x), \dots, u_m(x))|^p \leq (m+1)^{p-1}|g(x)|^p + c^p(m+1)^{p-1} \sum_{i=1}^m |u_i(x)|^{p_i}.$$

Інтегруючи цю нерівність, отримуємо

$$\|a(x, u_1, \dots, u_m)\|_{L^p(\Omega)} \leq (m+1)^{(p-1)/p} \|g\|_{L^p(\Omega)} + c(m+1)^{(p-1)/p} \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i/p} < \infty,$$

тобто оператор Немицького (7.11) є обмеженим. Доведення зворотного твердження і перевірка неперервності цього оператора є складнішим і громіздким. ▷

Оператор $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ (визначений в (7.9)), який діє по формулі

$$u \mapsto A(u) = -\operatorname{div} (a(x, \nabla u(x)))$$

є неперервним і обмеженим, якщо $a(x, \xi)$ задовольняє умовам Каратеодорі та

$$\exists \beta > 0 : |a(x, \xi)| \leq \beta |\xi|$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \in \mathbf{R}^n$.

Дійсно, оператор $(a(x, \nabla(\cdot))) : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^n$ є неперервним і обмеженим через теорему 7.9. Крім того, відомо, що оператор $(-\operatorname{div}) : L^2(\Omega)^n \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ є неперервним і обмеженим.

Також, цей оператор є коерцитивним і (строго) монотонним якщо, наприклад

$$\exists \alpha > 0 : (a(x, \xi) - a(x, \zeta), \xi - \zeta) \geq \alpha |\xi - \zeta|^2$$

і $a(x, 0) = 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^m$.

Зокрема, $a(x, \xi) = \xi$ задає оператор $A = (-\Delta) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, визначений рівністю (7.9), який діє по формулі

$$u \mapsto A(u) = -\Delta u(x),$$

і є неперервним, обмеженим, коерцитивним і монотонним.

8. Слабо напівнеперервні функціонали

В8.1. Розглянемо послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$. Множина межових точок такої послідовності $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ позначається через $\lim \text{Pt} \{\alpha_k\}$. Верхня і нижня межі цієї послідовності визначаються рівностями

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \sup \{ \alpha : \alpha \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\} \},$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \inf \{ \alpha : \alpha \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\} \}.$$

Відомо і безпосередньо перевіряється, що кожна обмежена послідовність має верхню і нижню межі. Крім того послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ є збіжною

$$\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k.$$

Теорема 8.1 (про сильну напівнеперервність знизу інтегрального функціонала). Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є областю, $\beta \in \mathbf{R}$ і функція

$$h(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow [\beta, \infty]$$

задовольняє умовам опуклості і Каратеодорі :

- (а) функція $h(x, \cdot) : \mathbf{R}^m \rightarrow [\beta, \infty]$ опукла і неперервна для майже всіх $x \in \Omega$;
- (б) функція $h(\cdot, \xi) : \Omega \rightarrow [\beta, \infty]$ вимірна для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m$.

Тоді

$$v_k \rightarrow v \text{ в } L^1(\Omega)^m \Rightarrow \int_{\Omega} h(x, v(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h(x, v_k(x)) dx. \quad \triangleleft \triangleright \quad (8.1)$$

Співвідношення (8.1) називається умовою *сильної напівнеперервності знизу* інтегрального функціонала (на $L^1(\Omega)^m$). Відповідно, умова (секвенціальної) *слабкої напівнеперервності знизу* інтегрального функціонала (на $L^1(\Omega)^m$) визначається співвідношенням

$$v_k \rightharpoonup v \text{ в } L^1(\Omega)^m \Rightarrow \int_{\Omega} h(x, v(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h(x, v_k(x)) dx. \quad (8.2)$$

Теорема 8.2 (про сильну і слабку напівнеперервність знизу функціонала).

Нехай B є нормованим простором і функціонал $I : B \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ є опуклим.

Тоді I є сильно напівнеперервним знизу на $B \iff$

I є слабо напівнеперервним знизу на B . $\triangleleft \triangleright$

Зокрема, в умовах теореми 8.1 співвідношення (8.1) та (8.2) є еквівалентними.

Теорема 8.3 (про існування мінімуму інтегрального функціонала). *Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є областю, $f \in W_0^{1,p}(\Omega)^*$, $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbf{R}$ і функція*

$$h(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^n \rightarrow [\beta, \infty]$$

задовольняє умовам опуклості, Каратеодорі і коерцитивності :

(а) функція $h(x, \cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow [\beta, \infty]$ опукла і неперервна для майже всіх $x \in \Omega$;

(б) функція $h(\cdot, \xi) : \Omega \rightarrow [\beta, \infty]$ вимірна для всіх $\xi \in \mathbf{R}^n$;

(с) існує $\alpha \in \mathbf{R}$ таке, що для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi \in \mathbf{R}^n$ виконана нерівність

$$h(x, \xi) \geq \alpha |\xi|^p + \beta.$$

Припустимо, що

$$\inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) < \infty,$$

де

$$I(v) = \int_{\Omega} h(x, \nabla v(x)) dx - \langle f, v \rangle.$$

Тоді $\exists u \in W_0^{1,p}(\Omega) :$

$$I(u) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v).$$

\triangleleft Використовуючи умови теореми і коерцитивність функції $h(x, \xi)$, маємо

$$I(v) \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + \beta \text{mes}(\Omega) - \|f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^*} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Тому із нерівності Фрідрікса випливає, що знайдуться $\sigma > 0$ і δ такі, що

$$I(v) \geq \sigma \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \delta \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Розглянемо деяку мінімізуючу послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ для функціонала I , тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v).$$

Існування такої послідовності впливає із визначення інфімуму.

Враховуючи припущення $\inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) < \infty$ і збіжність $I(v) \rightarrow \infty$ при $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty$, отримуємо, що послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою в рефлексивному просторі $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Таким чином, існують $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ і підпослідовність $\{u_l\}_{l=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=1}^\infty$:

$$\nabla u_l \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в} \quad L^p(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \nabla u_l \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в} \quad L^1(\Omega).$$

Використовуючи теореми 8.1 і 8.2, отримуємо

$$\int_{\Omega} h(x, \nabla u(x)) dx \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h(x, \nabla u_l(x)) dx.$$

Крім того, за визначенням (слабкій збіжності) маємо

$$\langle f, u_l \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle.$$

Отже,

$$\inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) \leq I(u) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} I(u_l) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v)$$

і тому $I(u) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v)$. \triangleright

Нехай функція

$$h(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow [\beta, \infty]$$

задовольняє всім умовам теореми 8.3 за виключенням умови опуклості, тоді функціонал

$$I(v) = \int_{\Omega} h(x, \nabla v(x)) dx$$

є слабо напівнеперервним знизу на $W_0^{1,p}(\Omega)^m \Leftrightarrow$ виконана умова

$$\int_{\Omega} h(x, \xi + \nabla \varphi(x)) dx \geq \int_{\Omega} h(x, \xi) dx \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^{n \times m}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^m,$$

яка називається умовою *квазіопуклості* функції $h(x, \xi)$.

9. Усереднення варіаційних нерівностей

Нехай для $n \geq 1$ задані обмежена область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ із ліпшицевою границею $\partial\Omega$, функція $f \in L^2(\Omega)$ та послідовність функцій $\{\psi_\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$, що залежить від малого додатного параметра ε і рівномірно обмежена щодо цього параметра, тобто

$$\|\psi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

із сталою C , що не залежить від ε , при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для деякого додатного ε_0 .

Розглянемо наступну задачу с малим параметром ε щодо функції $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$:

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) (\nabla \hat{v} - \nabla \hat{u}_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f (\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx$$

$$\forall \hat{v} \in K_\varepsilon \equiv \{\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \hat{v} \geq \psi_\varepsilon \text{ в } H^1(\Omega)\}, \quad (9.1)$$

де вектор-функція $a(y, \xi)$ є 1-періодичною по $y \in \mathbf{R}^n$ для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$. Отже, $a(y, \xi)$ для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$ цілком визначається своїм обмеженням на комірку періодичності $Y = [0, 1]^n$.

Припускається, що $a(y, \xi)$ для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$ є вимірною на Y , $a(y, 0) = 0$ та

$$0 < (a(y, \xi) - a(y, \zeta)) (\xi - \zeta) \quad \text{для } \xi \neq \zeta,$$

$$\alpha |\xi|^2 \leq a(y, \xi) \xi, \quad |a(y, \xi) - a(y, \zeta)| \leq \beta |\xi - \zeta| \quad (9.2)$$

для кожного $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y ,

де α та β є заданими додатними сталими.

Таким чином, існує єдиний (для фіксованого ε) розв'язок варіаційної нерівності (9.1) та за допомогою заміни $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon + \psi_\varepsilon$, $\hat{v} = v + \psi_\varepsilon$ ця нерівність еквівалентна варіаційній нерівності для $u_\varepsilon \in K$:

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u_\varepsilon) dx \quad (9.3)$$

$$\forall v \in K \equiv \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ в } H^1(\Omega)\}.$$

За теоремою Мінті ця нерівність еквівалентна варіаційній нерівності для $u_\varepsilon \in K$:

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u_\varepsilon) dx \quad \forall v \in K. \quad (9.4)$$

Теорема 9.1 (про рівномірну обмеженість). *Нехай $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ є розв'язком варіаційної нерівності (9.3) для фіксованого ε . Тоді*

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

із сталою C , що не залежить від ε , при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для деякого додатного ε_0 .

◁ Обираючи $v = 0$ в (9.3) та додаючи відповідні інтеграли, маємо

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} + \\ &+ \beta \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} \end{aligned}$$

та

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \right),$$

із сталою C , що не залежить від ε , оскільки $\|\nabla u_\varepsilon\| - \|\nabla \psi_\varepsilon\| \leq \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|$. ▷

Теорема 9.2. *Нехай $b(u, v)$ є білінійною формою на гільбертовому просторі H , $v_\varepsilon \rightarrow v$ і $u_\varepsilon \rightarrow u$ в H (при $\varepsilon \rightarrow 0$). Тоді*

$$b(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \rightarrow b(v, u). \quad \triangleleft \triangleright$$

Із теорем 7.5, 9.1 і 9.2 одразу отримуємо наступне просте твердження.

Теорема 9.3 (про збіжність). *Нехай $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ є розв'язком варіаційної нерівності (9.3) для фіксованого ε , $a(y, \xi) = a(\xi)$ не залежить від $y \in Y$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$ та $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ в $H_0^1(\Omega)$. Тоді*

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega),$$

де $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ є розв'язком наступної варіаційної нерівності для $u_0 \in K$:

$$\int_{\Omega} a(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)(\nabla v - \nabla u_0) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u_0) dx \quad \forall v \in K.$$

◁ Дійсно, із теорем 7.5 та 9.1 випливає, що існують $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ та підпоследовність $\{u_{\tilde{\varepsilon}}\} \subset H_0^1(\Omega)$ такі, що

$$u_{\tilde{\varepsilon}} \rightarrow u_0.$$

Таким чином, використовуючи теорему 9.2 та обчислюючи границю в (9.4), отримуємо потрібну нерівність варіаційну за теоремою Мінті. ▷

Область Ω є обмеженою. Тому, можна вважати, що існує $l > 0$ таке, що

$$\Omega \subset [0, \varepsilon m]^n \subset [0, l]^n$$

для фіксованих ε та цілого m .

Лема 9.4. Для функції $U \in L^2(Y)$, подовженої по періодичності на \mathbf{R}^n , та функції $v \in H_0^2(\Omega)$, виконується нерівність

$$\left| \int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \int_Y U(y) dy \int_{\Omega} v(x) dx \right| \leq \varepsilon^2 l^n \|U\|_{L^2(Y)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$$

◁ Визначимо $M(y) \in H_{pe*}^2(Y)$ як розв'язок рівняння

$$\Delta_y M(y) = U(y) - \int_Y U(y) dy$$

та подовжимо $M(y)$ по періодичності. Враховуючи, що

$$\varepsilon^2 \Delta_x M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \Delta_y M(y)|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} = U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \int_Y U(y) dy,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \int_Y U(y) dy \int_{\Omega} v(x) dx = \\ & = \varepsilon^2 \int_{\Omega} \Delta_x M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx = \varepsilon^2 \int_{\Omega} M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta v(x) dx. \end{aligned}$$

Таким чином, використовуючи нерівність Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$\left| \int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \int_Y U(y) dy \int_{\Omega} v(x) dx \right| \leq \varepsilon^2 \|M^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$$

та

$$\|M^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{[0, \varepsilon m]^n} M^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon^n \int_{[0, m]^n} M^2(y) dy = \varepsilon^n m^n \|M\|_{L^2(Y)}^2 \leq l^n \|U\|_{L^2(Y)}^2$$

для $M^\varepsilon = M(x/\varepsilon)$, оскільки відомо, що $\|M\|_{L^2(Y)}^2 \leq \|U\|_{L^2(Y)}^2$. ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для $U \in L^2(Y)$, подовженої по періодичності на \mathbf{R}^n , та $v \in H_0^1(\Omega)$, виконується нерівність

$$\left| \int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \int_{\Omega} \int_Y U(y) v(x) dy dx \right| \leq \varepsilon l^n \|U\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для $U \in L^2(Y)$, подовженої по періодичності на \mathbf{R}^n , та $v \in L^2(\Omega)$ виконується співвідношення

$$\int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y U(y) v(x) dy dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

тобто

$$U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \int_Y U(y) dy \quad \text{в} \quad L^2(\Omega). \quad)$$

В9.5. Послідовність $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^2(\Omega)$ називається *двомасштабно збіжною* до $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ (позначення $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$) при $\varepsilon \rightarrow 0$, якщо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx \quad (9.5)$$

для кожного $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$. Тут і надалі індекс *per* означає 1-періодичність по $y \in \mathbf{R}^n$, а включення $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$ означає, що обмеження $\varphi(x, y)$ на Y належить $L^2(Y; C(\overline{\Omega}))$. Зокрема, для $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$ маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y) dy dx.$$

Крім того, відомо, що для $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$ виконуються співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y)^2 dy dx$$

та

$$\int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx \leq \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y)^2 dy dx.$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити наступне твердження: якщо $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^2(\Omega)$, тоді

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2} v. \quad)$$

Теорема 9.6 (про двомасштабну компактність в $L^2(\Omega)$). *Нехай $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ є рівномірно обмеженою послідовністю. Тоді існують $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ та підпослідовність $\{v_{\tilde{\varepsilon}}\} \subset L^2(\Omega)$ такі, що*

$$v_{\tilde{\varepsilon}} \xrightarrow{2} v_0$$

та $v_{\tilde{\varepsilon}} \rightharpoonup v = \int_Y v_0(x, y) dy$ в $L^2(\Omega)$. $\triangleleft \triangleright$

Визначимо простір дійснозначних тригонометричних поліномів рівністю

$$\text{Trig}_*(Y) = \left\{ u = \sum_{m \in Z^n \setminus \{0\}: |m| \leq M} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} : \alpha_m = \bar{\alpha}_{-m} \quad \forall m \in Z_*^n \right\}$$

та простір $C_{0pe*}^\infty(\Omega \times Y)$ як множину скінчених лінійних комбінацій функцій виду $v = v_0(x) \cdot v_p(y)$, де $v_0(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ і $v_p(y) \in \text{Trig}_*(Y)$. Аналогічно, замінюючи $\text{Trig}_*(Y)$ на $\text{Trig}(Y)$, визначимо простір $C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$.

Відомо, що $C_0^\infty(\Omega)$ щільно в $L^2(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$. Крім того, $C_{0pe*}^\infty(\Omega \times Y)$ щільно в $L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$ і $L^2(\Omega; L_*^2(Y)) = L^2(\Omega; H_{pe*}^0(Y))$ та $C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$ щільно в $L^2(\Omega; L^2(Y)) = L^2(\Omega \times Y)$.

Теорема 9.7 (про двомасштабну компактність в $H_0^1(\Omega)$). *Нехай $\{v_\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ є рівномірно обмеженою послідовністю. Тоді знайдуться такі $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ та $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$, що (після виділення підпослідовності при $\varepsilon \rightarrow 0$)*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega) \quad \text{і} \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1.$$

◁ Із теорем 7.5 і 9.6 випливає, що існують $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ та $u_g(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ такі, що

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega) \quad \text{і} \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} u_g.$$

Визначаючи $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$, можна вважати, що $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $H_0^1(\Omega)$ і $\int_Y u_g(x, y) dy = 0$.

Нехай $\varphi(x, y) \in C_{0pe*}^\infty(\Omega \times Y)^n$, тоді

$$\varepsilon \text{rot} (w(x, x/\varepsilon)) = (\text{rot}_y w(x, y) + \varepsilon \text{rot}_x w(x, y)) \quad \text{для } y = x/\varepsilon$$

та

$$0 = \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla u_\varepsilon) \text{rot} (w(x, x/\varepsilon)) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y (u_g) \text{rot}_y w(x, y) dy dx$$

за визначенням двомасштабної збіжності (9.5). Таким чином, $\text{rot}_y u_g(x, y) = 0$ та із теореми Вейля випливає, що знайдеться $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$ таке, що

$$u_g(x, y) = \nabla_y u_1(x, y). \quad \triangleright$$

Теорема 9.8. *Нехай $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ є розв'язком варіаційної нерівності (9.3). Тоді знайдуться такі $\psi_0, u_0 \in H_0^1(\Omega)$ і $\psi_1, u_1 \in L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$, що*

$$\psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi_0, \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega),$$

$$\nabla \psi_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1, \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1$$

та $u_0 \geq 0$ в $H^1(\Omega)$ (після виділення підпоследовностей при $\varepsilon \rightarrow 0$).

◁ Ця теорема випливає із теорем 9.1 та 9.7. ▷

Теорема 9.9. *Нехай H є гільбертовим простором. Тоді*

$$v_\varepsilon \rightarrow v \quad \Leftrightarrow \quad i) \quad v_\varepsilon \rightharpoonup v; \quad ii) \quad \|v_\varepsilon\|_H \rightarrow \|v\|_H.$$

◁ Дійсно, $\|v_\varepsilon - v\|_H^2 = \langle v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle - \langle v, v \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, v_\varepsilon \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v_\varepsilon, v \rangle \rightarrow 0$. ▷

В9.10. Последовність $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^2(\Omega)$ називається *двомасштабно сильно збіжною* до $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ (позначення $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$) при $\varepsilon \rightarrow 0$, якщо

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0 \quad \text{та} \quad \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|v_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

Теорема 9.11 (про двомасштабну сильну збіжність). *Нехай послідовність $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ така, що $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$ та $v_0 \in C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$. Тоді*

$$\|v_\varepsilon(x) - v_0(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0.$$

◁ Дійсно, за визначенням 9.5 маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon(x) - v_0(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(x) - v_0(x, x/\varepsilon))^2 dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(x)^2 - 2v_\varepsilon(x)v_0(x, x/\varepsilon) + v_0(x, x/\varepsilon)^2) dx = \\ &= \int_{\Omega} \int_Y (v_0(x, y)^2 - 2v_0(x, y)v_0(x, y) + v_0(x, y)^2) dy dx = 0. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Насправді ця теорема є вірною при $v_0 \in L_{per}^2(Y; C(\bar{\Omega}))$, що випливає із визначення двомасштабної збіжності (9.5).

Теорема 9.12 (про апроксимаційну двомасштабну сильну збіжність). *Нехай послідовність $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ така, що $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$. Тоді знайдеться послідовність $\{v_0^i\} \subset C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$ така, що*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon(x) - v_0^i(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

◁ Простір $C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$ є щільним у $L^2(\Omega \times Y)$. Тому знайдеться послідовність $\{v_0^i\} \subset C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$ така, що $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_0 - v_0^i\|_{L^2(\Omega \times Y)} = 0$ та

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon(x) - v_0^i(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(x) - v_0^i(x, x/\varepsilon))^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_{\varepsilon}(x)^2 - 2v_{\varepsilon}(x)v_0^i(x, x/\varepsilon) + v_0^i(x, x/\varepsilon)^2) dx = \\
&= \int_{\Omega} \int_Y (v_0(x, y)^2 - 2v_0(x, y)v_0^i(x, y) + v_0^i(x, y)^2) dy dx = \|v_0 - v_0^i\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2. \quad \triangleright
\end{aligned}$$

Повернемося до задачі (9.4) та припустимо, що ψ_0 і ψ_1 у теоремі 9.8 є визначеними однозначно та

$$\nabla \psi_{\varepsilon} \xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1.$$

Тоді знайдуться послідовності $\{\psi_0^i\} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ та $\{\psi_1^i\} \subset C_{0pe*}^{\infty}(\Omega \times Y)$ таки, що

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_{\varepsilon}(x) - \nabla \psi_0^i(x) - (\nabla_y \psi_1^i)(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^n} = 0. \quad (9.6)$$

Фіксуємо $v_0 \in C_0^{\infty}(\Omega)$ і $v_1 \in C_{0pe*}^{\infty}(\Omega \times Y)$ таки, що $v_0 \geq 0$ в Ω та визначимо

$$K_2 \equiv \{(w_0, w_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y)) : w_0 \geq 0 \text{ в } H^1(\Omega)\}.$$

Тоді $(v_0, v_1) \in K_2$ і знайдеться така постійна δ , що $|v_1| \leq \delta$ в $\bar{\Omega} \times Y$.

Оберемо для кожного ε невід'ємну функцію $e_{\varepsilon} \in W_0^{1, \infty}(\Omega)$, рівну нулю при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$ і одиниці при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$, де $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ позначає відстань від точки x до межі $\partial\Omega$. Для достатньо малих ε ($\leq \varepsilon_0$) такі функції існують, $|\varepsilon \nabla e_{\varepsilon}| \leq C$ в Ω та носій функції ∇e_{ε} міститься в прикордонній смузі $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$ ширини 2ε . Отже,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_{2\varepsilon})^n} = 0 \quad (9.7)$$

і можна вважати, що $e_{\varepsilon} = 1$ на носії функції $v_1(x, x/\varepsilon)$. Таким чином, маємо $v_1(x, x/\varepsilon) + \delta e_{\varepsilon} \geq 0$ в Ω . Обираючи у задачі (9.4) функцію

$$v = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon \delta e_{\varepsilon}$$

та враховуючи, що

$$\nabla(\varepsilon v_1(x, x/\varepsilon)) = (\nabla_y v_1(x, y) + \varepsilon \nabla_x v_1(x, y)) \quad \text{при } y = x/\varepsilon,$$

отримаємо при $(\nabla_y v_1)^{\varepsilon} = (\nabla_y v_1)(x, x/\varepsilon)$ та $(\nabla_y \psi_1^i)^{\varepsilon} = (\nabla_y \psi_1^i)(x, x/\varepsilon)$ наступну варіаційну нерівність

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_0^i + (\nabla_y \psi_1^i)^{\varepsilon} + \nabla v_0 + (\nabla_y v_1)^{\varepsilon}\right) (\nabla v_0 + (\nabla_y v_1)^{\varepsilon} - \nabla u_{\varepsilon}) dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_{\varepsilon}) dx + \sigma_{\varepsilon}^i, \quad (9.8)$$

де $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{\varepsilon}^i = 0$ завдяки (9.6) та (9.7).

Враховуючи, що $a(y, \nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) \in L^2_P(Y; C(\bar{\Omega})^n)$ та переходячи до границі, отримуємо варіаційну нерівність для $(u_0, u_1) \in K_2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx, \end{aligned} \quad (9.9)$$

де $(v_0, v_1) \in K_2$. Перевіряється, що ця нерівність виконана не тільки для гладких та фінітних $v_0 \in C_0^{\infty}(\Omega)$ і $v_1 \in C_{0pe*}^{\infty}(\Omega \times Y)$, але й для всіх $(v_0, v_1) \in K_2$. Дійсно, для

$$(v_0, v_1) \in K_2 \equiv \{ (w_0, w_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y)) : w_0 \geq 0 \text{ в } H^1(\Omega) \}.$$

знайдуться $v_0^i \in C_0^{\infty}(\Omega)$ і $v_1^i \in C_{0pe*}^{\infty}(\Omega \times Y)$ таки, що $v_0 \geq 0$ в Ω та

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla v_0^i - \nabla_y v_1^i \right\|_{L^2(\Omega \times Y)^n} = 0.$$

Нерівність (9.9) виконана для $(v_0^i, v_1^i) \in K_2$ і тому для $(v_0, v_1) \in K_2$ завдяки (9.2) (тобто $|a(y, \xi) - a(y, \zeta)| \leq \beta |\xi - \zeta|$).

Теорема 9.13 ($\exists 1$ для двомасштабної варіаційної нерівності). *Існує єдиний розв'язок $(u_0, u_1) \in K_2$ варіаційної нерівності (9.9), що розглядається для всіх $(v_0, v_1) \in K_2$, та ця нерівність еквівалентна нерівності для $(u_0, u_1) \in K_2$:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \quad \forall (v_0, v_1) \in K_2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

\triangleleft Через теорему 9.8 існує деякий розв'язок $(u_0, u_1) \in K_2$ варіаційної нерівності (9.9), що розглядається $\forall (v_0, v_1) \in K_2$. Фіксуємо $(w_0, w_1) \in K_2$ та оберемо

$$(v_0, v_1) = (u_0 + \sigma(w_0 - u_0), u_1 + \sigma(w_1 - u_1)) \quad \text{для } 0 < \sigma \leq 1$$

в нерівності (9.9). Тоді $(v_0, v_1) \in K_2$ і нерівність (9.9) приймає вигляд

$$\int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \sigma \nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y u_1 + \sigma \nabla_y(w_1 - u_1)) \cdot$$

$$\cdot (\nabla w_0 + \nabla_y w_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \int_{\Omega} f(w_0 - u_0) dx,$$

де $(w_0, w_1) \in K_2$. Використовуючи (9.2), в цій нерівності можна перейти до границі при $\sigma \rightarrow 0$ і отримати, що $(u_0, u_1) \in K_2$ є розв'язком нерівності (9.10).

Нехай $(u_0, u_1) \in K_2$ є деяким розв'язком (9.10). Із (9.2) маємо

$$a(y, \xi)(\xi - \zeta) \geq a(y, \zeta)(\xi - \zeta)$$

для $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y . Виберемо в цій нерівності

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1, \quad \zeta = \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1$$

для м. в. $x \in \Omega$ та м. в. $y \in Y$ та проінтегруємо результат по $\Omega \times Y$, тоді

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \end{aligned}$$

для $(v_0, v_1) \in K_2$, оскільки $(u_0, u_1) \in K_2$ є деяким розв'язком нерівності (9.10), тобто, варіаційна нерівність (9.9) еквівалентна варіаційній нерівності (9.10).

Припустимо, що $(u_0^1, u_1^1) \in K_2$ та $(u_0^2, u_1^2) \in K_2$ розв'язками нерівності (9.10). Розглянемо цю нерівність для (u_0^1, u_1^1) і оберемо $(v_0, v_1) = (u_0^2, u_1^2)$. Аналогічно, розглянемо цю нерівність для (u_0^2, u_1^2) і оберемо $(v_0, v_1) = (u_0^1, u_1^1)$. Додаючи першу нерівність до другої отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y (a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1) - a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \\ & + \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2)) (\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2) dy dx \leq 0. \end{aligned}$$

Відповідно до (9.2), отримуємо

$$\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 = \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2 \quad \text{м. с. в } \Omega \times Y.$$

Інтегруючи цю рівність по Y та враховуючи рівності

$$\int_Y \nabla_y u_1^1 dy = \int_Y \nabla_y u_1^2 dy = 0,$$

маємо $\nabla u_0^1 = \nabla u_0^2$ м. с. в Ω . \triangleright

Оберемо $v_0 = u_0$ в (9.10) і припустимо формально, що $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$ та $U = \psi_1 + u_1$. Таким чином, отримуємо варіаційну нерівність для $U \in H_{pe*}^1(Y)$:

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U) (\nabla_y V - \nabla_y U) dy \geq 0 \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y). \quad (9.11)$$

Теорема 9.14. Для фіксованого $\xi \in \mathbf{R}^n$ існує єдиний розв'язок $U \in H_{pe*}^1(Y)$ варіаційної нерівності (9.11) та ця нерівність еквівалентна варіаційному рівнянню для $U \in H_{pe*}^1(Y)$:

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U) \nabla_y V dy = 0 \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y). \quad (9.12)$$

Крім того, функція $U = U(\xi)$ є слабо неперервною як функція на \mathbf{R}^n із значеннями в $H_{pe*}^1(Y)$.

◁ Вже відомо, що для фіксованого $\xi \in \mathbf{R}^n$ існує єдиний розв'язок (9.11) та ця нерівність еквівалентна варіаційному рівнянню (9.12).

Фіксуємо $\xi \in \mathbf{R}^n$. Необхідно перевірити, що

$$\begin{aligned} \nabla_y U(\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y U(\xi) \quad \text{слабко в } L^2(Y)^n \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \\ \text{якщо } |\xi_i - \xi| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

де $U(\xi_i) \in H_{pe*}^1(Y)$ є єдиним розв'язком (9.11) для $\xi_i \in \mathbf{R}^n$ та $U(\xi)$ є єдиним розв'язком (9.11) для $\xi \in \mathbf{R}^n$. Із (9.2) та (9.12) для $V = U(\xi)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n}^2 &\leq \int_Y (a(y, \nabla_y U) - a(y, \xi + \nabla_y U)) \nabla_y U dy \leq \\ &\leq \|a(y, \nabla_y U) - a(y, \xi + \nabla_y U)\|_{L^2(Y)^n} \|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n} \end{aligned}$$

і тому $\|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n} \leq (\beta/\alpha) |\xi|$. Таким чином, можна вважати, що послідовність $\{\nabla_y U(\xi_i)\} \subset L^2(Y)^n$ є рівномірно обмеженою і знайдеться таке $W \in H_{pe*}^1(Y)$, що (після виділення підпослідовності при $i \rightarrow \infty$)

$$\nabla_y U(\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y W \quad \text{слабко в } L^2(Y)^n.$$

Розглянемо задачу (9.11) при $\xi_i \in \mathbf{R}^n$, яка еквівалентна наступній варіаційній нерівності для $U(\xi_i) \in H_{pe*}^1(Y)$:

$$\int_Y a(y, \xi_i + \nabla_y V) (\nabla_y V - \nabla_y U(\xi_i)) dy \geq 0 \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y).$$

Для кожного $V \in H_{pe*}^1(Y)$ у цієї нерівності можна перейти до границі, оскільки

$$a(y, \xi_i + \nabla_y V) \rightarrow a(y, \xi + \nabla_y V)$$

в $L^2(Y)^n$, і отримати, що $W = U(\xi)$. \triangleright

Із нерівності $\|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n}^2 \leq (\beta/\alpha)^2 |\xi|^2$ та неперервності функції $U(\xi)$ отримуємо $U(y, \nabla v_0(x)) \in L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$, якщо $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Таким чином, має сенс наступне твердження про зв'язок розв'язку варіаційної нерівності (9.10) із розв'язками (формально отриманої) варіаційної нерівності (9.11).

Теорема 9.15. *Нехай $(u_0, u_1) \in K_2$ є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.10). Тоді*

$$u_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla u_0(x)) - \psi_1(x, y),$$

де $U(\xi)$ є єдиним (для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$) розв'язком варіаційного рівняння (9.12).

\triangleleft Відповідно із (9.2), маємо

$$0 \leq a(y, \xi)(\xi - \zeta) - a(y, \zeta)(\xi - \zeta)$$

для кожного $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y . Оберемо в цій нерівності

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)$$

та

$$\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1$$

для м. в. $x \in \Omega$ і м. в. $y \in Y$ та проінтегруємо результат по $\Omega \times Y$. Тоді

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx - \\ & - \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx, \end{aligned} \quad (9.13)$$

де позначено $\eta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$. Обираючи $v_0 = u_0$ та $v_1 = U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1$ в (9.10), отримуємо

$$\int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx \geq 0. \quad (9.14)$$

Оберемо $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$ та $V = U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1 - u_1$ (для м. в. $x \in \Omega$) в (9.12) та проінтегруємо результат по Ω , отримуємо рівність

$$\int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx = 0.$$

Враховуючи цю рівність та співвідношення (9.14) укладаємо, що в (9.13) виконана рівність і тому

$$\nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) = \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1 \quad \text{м. с. в } \Omega \times Y. \quad \triangleright$$

Нагадаємо, що досліджуємо варіаційну нерівність для $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) (\nabla \hat{v} - \nabla \hat{u}_\varepsilon) dx &\geq \int_{\Omega} f(\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx \\ \forall \hat{v} \in K_\varepsilon &\equiv \{\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \hat{v} \geq \psi_\varepsilon \text{ в } H^1(\Omega)\}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

яка еквівалентна варіаційній нерівності для $u_\varepsilon \in K$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx &\geq \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon) dx \\ \forall v \in K &\equiv \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ в } H^1(\Omega)\}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Розв'язки цієї нерівності збігаються в сенсі теореми 9.8 до розв'язків варіаційної двомасштабної нерівності для $(u_0, u_1) \in K_2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \quad \forall (v_0, v_1) \in K_2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Крім того, вже доведено в теоремі 9.15, що

$$u_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla u_0(x)) - \psi_1(x, y),$$

де $U(\xi)$ є єдиним (для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$) розв'язком варіаційного рівняння для $U \in H_{pe*}^1(Y)$:

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U) \nabla_y V dy = 0 \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y). \quad (9.12)$$

Таким чином, обираючи $v_1 = u_1$ в (9.10) та використовуючи теорему 9.15, отримуємо варіаційну нерівність для $u_0 \in K$:

$$\int_{\Omega} A(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) (\nabla v_0 - \nabla u_0) dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \quad \forall v_0 \in K, \quad (9.15)$$

де

$$A(\xi) = \int_Y a(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) dy. \quad (9.16)$$

Ця варіаційна нерівність еквівалентна (за допомогою заміни $\hat{u}_0 = \psi_0 + u_0$, $\hat{v}_0 = \psi_0 + v_0$) варіаційній нерівності для $\hat{u}_0 \in K_0$:

$$\int_{\Omega} A(\nabla \hat{u}_0) (\nabla \hat{v}_0 - \nabla \hat{u}_0) dx \geq \int_{\Omega} f(\hat{v}_0 - \hat{u}_0) dx \quad (9.17)$$

$$\forall \hat{v}_0 \in K_0 \equiv \{ \hat{v}_0 \in H_0^1(\Omega) : \hat{v}_0 \geq \psi_0 \text{ в } H^1(\Omega) \}.$$

Теорема 9.16 (про збіжність розв'язків при усередненні варіаційних нерівностей). *Нехай $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$ є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.1) для фіксованого ε та $\nabla \psi_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1$. Тоді*

$$\hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega) \quad \text{і}$$

$$\nabla \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \hat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

де $\hat{u}_0 \in K_0$ є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.17) та $U(\xi)$ є єдиним (для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$) розв'язком варіаційної нерівності (9.11).

◁ Використовуючи теорему 9.15 та обираючи $v_1 = u_1$ в (9.10), отримаємо, що u_0 (яке визначене в теоремі 9.8) є розв'язком варіаційної нерівності (9.15). Єдиність цього розв'язку (і тому розв'язку задачі (9.17)) впливає із строгої монотонності вектор-функції $A(\xi)$, яку нескладно вивести із (9.2).

Дійсно, для кожного $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$ із (9.2) маємо

$$0 \leq (a(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) - a(y, \zeta + \nabla_y U(\zeta)))(\xi - \zeta + \nabla_y U(\xi) - \nabla_y U(\zeta))$$

м. с. в Y . Інтегруючи цю нерівність по Y та враховуючи (9.12), отримаємо

$$0 \leq (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta).$$

Припустимо, що $0 = (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta)$. Тоді

$$0 = (a(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) - a(y, \zeta + \nabla_y U(\zeta)))(\xi - \zeta + \nabla_y U(\xi) - \nabla_y U(\zeta))$$

м. с. в Y і тому $\xi + \nabla_y U(\xi) = \zeta + \nabla_y U(\zeta)$ м. с. в Y завдяки (9.2). Інтегруючи останню рівність по Y , отримуємо $\xi = \zeta$ та

$$0 < (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta) \quad \text{для } \xi \neq \zeta,$$

що доводить строгу монотонність $A(\xi)$ та єдиність розв'язку задачі (9.15).

Таким чином, безпосередньо із теорем 9.8, 9.13 та 9.15 випливає, що

$$\hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega) \quad \text{і} \quad \nabla \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \hat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

без виділення підпослідовностей, оскільки границі є визначеними однозначно. \triangleright

Відзначимо, що доведене також наступне твердження.

Теорема 9.17. *Нехай $(u_0, u_1) \in K_2$ є розв'язком варіаційної нерівності (9.10). Тоді*

$$(u_0, u_1) = (u_0, U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1),$$

де $u_0 \in K$ є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.15), $U(\xi)$ є єдиним (для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$) розв'язком варіаційного рівняння (9.12) та ψ_0 і ψ_1 визначені у теоремі 9.8.

Крім того, буде доведено наступне зворотне твердження.

Теорема 9.18. *Нехай $u_0 \in K$ є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.15), $U(\xi)$ є єдиним (для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$) розв'язком варіаційного рівняння (9.12) та ψ_0 і ψ_1 визначені у теоремі 9.8. Тоді*

$$(u_0, u_1) = (u_0, U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1)$$

є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.10).

\triangleleft Нехай $(v_0, v_1) \in K_2$ і $u_1 = U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1$. Оберемо

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$$

і $V = v_1 - u_1$ (для м. в. $x \in \Omega$) у (9.12) та проінтегруємо результат по Ω . Тоді, додаючи отриману рівність до нерівності із (9.15), маємо в точності варіаційну нерівність (9.10), розв'язок якої є єдиним у відповідності до теореми 9.13. \triangleright

Розглянемо окремий випадок, коли $a(y, \xi)$ у задачі (9.1) має вигляд

$$a(y, \xi) = \nabla_\xi b(y, \xi), \quad (9.18)$$

де функція $b(y, \xi)$ є вимірною на Y для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$ та неперервною відносно $\xi \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y . Крім того, припускається, що для $a(y, \xi)$ виконані нерівності (9.2). В цьому випадку, відомо, що варіаційна нерівність (9.3) еквівалентна

(при фіксованому ε) задачі мінімізації для $u_\varepsilon \in K$:

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{v \in K} F_\varepsilon(v), \quad F_\varepsilon(v) = \int_{\Omega} (b(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\psi_\varepsilon + \nabla v) - f v) dx. \quad (9.19)$$

Також відомо, що варіаційне рівняння (9.12) еквівалентно (при фіксованому $\xi \in \mathbf{R}^n$), якщо виконано (9.18), задачі мінімізації для $U \in H_{pe*}^1(Y)$:

$$F_\xi(U) = \min_{V \in H_{pe*}^1(Y)} F_\xi(V), \quad F_\xi(V) = \int_Y b(y, \xi + \nabla_y V) dy. \quad (9.20)$$

Розглянемо також усереднену задачу мінімізації для $u_0 \in K$:

$$F_0(u_0) = \min_{v_0 \in K} F_0(v_0), \quad F_0(v_0) = \int_{\Omega} (B(\nabla\psi_0 + \nabla v_0) - f v_0) dx, \quad (9.21)$$

де $B(\xi) = \int_Y b(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) dy$ та $U(y, \xi)$ є розв'язком задачі мінімізації (9.2) для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Формально, маємо $\nabla_\xi B(\xi) = \int_Y \nabla_\xi b(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) (E + \nabla_\xi \nabla_y U(\xi)) dy$, тому рівність $A(\xi) = \nabla_\xi B(\xi)$ не впливає безпосередньо із (9.16) та (9.18).

Проте, буде доведено наступне твердження.

Теорема 9.18. *Існує єдиний розв'язок $u_0 \in K$ задачі мінімізації (9.21) та ця задача еквівалентна варіаційній нерівності (9.15), якщо виконано (9.18).*

◁ Із (9.2) та (9.18) випливає, що

$$b(y, \xi) - b(y, \zeta) \geq a(y, \zeta) (\xi - \zeta) \quad (9.22)$$

та

$$0 \leq b(y, \xi) - b(y, \zeta) - a(y, \zeta) (\xi - \zeta) \leq (\beta/2) |\xi - \zeta|^2 \quad (9.23)$$

для кожного $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y . Дійсно використовуючи неперервність $b(y, \xi)$ та $a(y, \xi)$ відносно ξ , маємо співвідношення

$$\begin{aligned} b(y, \xi) - b(y, \zeta) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} b(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) dt = \\ &= \int_0^1 \nabla_\xi b(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) dt (\xi - \zeta) = \\ &= a(y, \zeta) (\xi - \zeta) + \int_0^1 (a(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) - a(y, \zeta)) dt (\xi - \zeta) \end{aligned}$$

і залишається скористатися (9.2).

Нехай $u_0 \in K$ є розв'язком усередненої задачі (9.15) і $v_0 \in K$. Оберемо в нерівності (9.22)

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0),$$

$$\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla u_0)$$

для м. в. $x \in \Omega$ і м. в. $y \in Y$ та проінтегруємо результат по $\Omega \times Y$. Тоді, позначаючи $\eta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$, маємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0)) dy dx - \\ & \quad - \int_{\Omega} \int_Y b(y, \eta + \nabla_y U (\eta)) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U (\eta)) (\nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0) - \\ & \quad - \eta - \nabla_y U (\eta)) dy dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx, \end{aligned}$$

оскільки u_0 задовольняє нерівності із (9.10), де враховано теорему 9.15 та обрано $v_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla v_0(x)) - \psi_1(x, y)$. З цих нерівностей випливає, що

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0)) - f v_0) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla u_0)) - f u_0) dy dx \quad (9.24) \end{aligned}$$

для всіх $v_0 \in K$, тобто $u_0 \in K$ є розв'язком усередненої задачі мінімізації (9.21).

Припустимо зараз, що $u_0 \in K$ є розв'язком задачі мінімізації (9.21), тобто виконано (9.24). Для фіксованого $\xi \in \mathbf{R}^n$ розглянемо задачу мінімізації (9.20) для $U(\xi) \in H_{pe*}^1(Y)$. Тоді, маємо

$$\int_Y b(y, \xi + \nabla_y V) dy \geq \int_Y b(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) dy \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y). \quad (9.25)$$

Нехай $(v_0, v_1) \in K_2$. Обираючи $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla v_0$ і $V = v_1$ (для м. в. $x \in \Omega$) в (9.25) та інтегруючи результат по Ω , отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0)) dy dx. \quad (9.26) \end{aligned}$$

Враховуючи цю нерівність в (9.24), маємо співвідношення

$$\int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) dy dx - \\ - \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)) dy dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx.$$

Оберемо в цьому співвідношенні $v_0 = u_0 + \sigma(w_0 - u_0)$ і $v_1 = U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)$, де $w_0 \in K$ та $0 < \sigma \leq 1$. Тоді, враховуючи нерівність (9.23), де обрано

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \sigma \nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0),$$

$$\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0),$$

маємо

$$\sigma \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)) (\nabla w_0 - \nabla u_0) dy dx + \\ + \sigma^2 \int_{\Omega} |\nabla(w_0 - u_0)|^2 dx \geq \sigma \int_{\Omega} f(w_0 - u_0) dx \quad (9.27)$$

для $w_0 \in K$, оскільки $\xi - \zeta = \sigma \nabla(w_0 - u_0)$ для обраних ξ та ζ . Обчислюючи границю при $\sigma \rightarrow 0$ у (9.27), робимо висновок, що $u_0 \in K$ є розв'язком усередненої задачі (9.15). \triangleright

Розглянемо, також двомасштабну задачу мінімізації для $(u_0, u_1) \in K_2$:

$$F_2(u_0, u_1) = \min_{(v_0, v_1) \in K_2} F_2(v_0, v_1), \quad (9.28)$$

де $F_2(v_0, v_1) = \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) - f v_0) dy dx$.

Теорема 9.19. *Існує єдиний розв'язок $(u_0, u_1) \in K_2$ задачі мінімізації (9.28) та ця задача еквівалентна варіаційній нерівності (9.15), якщо виконано (9.18).*

\triangleleft Доведення цього твердження фактично повторює доведення теореми 9.18. Дійсно, розв'язок $(u_0, u_1) \in K_2$ варіаційної нерівності (9.10) є розв'язком двомасштабної задачі мінімізації (9.28) завдяки (9.22) із відповідними ξ та ζ . Зворотне твердження випливає із (9.26), теореми 9.15 і нерівності (9.23). \triangleright

Таким чином, еквівалентність (при $a(y, \xi) = \nabla_{\xi} b(y, \xi)$) задачі мінімізації (9.19) і варіаційної нерівності (9.3) (еквівалентної (9.1)) зберігається при усередненні і двомасштабному усередненні та твердження про збіжність розв'язків задачі мінімізації (9.19) випливає із теореми 9.16.

Для $f_\varepsilon \in H^{-1}(\Omega)$ розглянемо задачу Дірихле для дивергентного рівняння

$$-\operatorname{div}(a(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega),$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega),$$

де симетрична 1-періодична матриця $a(y) \in \tilde{L}_{per}^\infty(Y)^{n \times n}$ є такою, що

$$\alpha I \leq a(y) \leq \beta I \quad \text{для м. в.} \quad y \in Y$$

та деяких $\alpha, \beta > 0$. Для $v \in H_0^1(\Omega)$ позначимо $A_\varepsilon v = -\operatorname{div}(a(x/\varepsilon)\nabla v)$.

Нехай $N(y) \in H_{pe*}^1(Y)^n$ є 1-періодичним розв'язком наступної задачі

$$\operatorname{div}_y(a(y)(I - \nabla_y N)) = 0 \quad \text{в} \quad H_{pe*}^{-1}(Y)$$

та

$$\hat{a} = \int_Y (a(y)(I - \nabla_y N)) dy.$$

Для $f \in H^{-1}(\Omega)$ розглянемо також задачу Дірихле для рівняння із сталими коефіцієнтами

$$-\operatorname{div}(\hat{a}\nabla u) = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega).$$

Для $v \in H_0^1(\Omega)$ позначимо $Av = -\operatorname{div}(\hat{a}\nabla v)$ та

$$u_\varepsilon^a = u(x) + \varepsilon N(x/\varepsilon) \nabla u(x), \quad u_\varepsilon^e = u(x) + \varepsilon e_\varepsilon N(x/\varepsilon) \nabla u(x).$$

Теорема 9.19. *Існує стала C така, що*

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^e\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f_\varepsilon - f\| + \varepsilon^{1/2} C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

◁

Рекомендована література

1. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. *Оптимизация*. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. 320 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике*. – М.: Мир, 1972. 587 с.
3. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. – М.: Мир, 1972. 384 с.
4. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. *Введение в вариационные неравенства*. – М.: Мир, 1983. 256 с.
5. Съярле Ф. *Математическая теория упругости*. – М.: Мир, 1992. 472 с.
6. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*. – М.: Мир, 1979. 399 с.

Додаткова література

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа*. – М.: Наука, 1965.. 520 с.
3. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М.:Наука, 1989. 384 с.